

ANALISIS DUALITAS PROGRAM LINIER DALAM OPTIMASI BIAYA PRODUKSI MINUMAN PADA WARUNG KOPI

Nerli Khairani¹, Ellys Rebecca Simanjuntak², Maysi Puspita³, Keisya Amelia Putri⁴

^{1,2,3,4}Matematika FMIPA Universitas Negeri Medan

elissimanjuntak25@gmail.com

ABSTRACT

Problems in beverage production in small businesses often occur due to limited raw materials, production time, and operational costs, so that an optimal production combination is needed to minimize costs. This study discusses the application of linear programming duality in optimizing beverage production costs at the "Pak Budi" Coffee Shop with two decision variables, namely the production of Milk Coffee and Iced Coffee. The method used is a linear program with a duality approach and the simplex method to solve the optimization model. The primal minimization model is formed based on the constraints of the availability of coffee beans, milk, ice cubes, sugar, and production time, then transformed into a dual maximization model and solved using the simplex method. The results of the analysis show that the optimal solution is obtained at the production of approximately 2.67 glasses of Milk Coffee and 2 glasses of Iced Coffee with a minimum production cost of Rp21,333.33 per day. In addition, the optimal value of the dual model is the same as the optimal value of the primal model, thus proving the validity of the Strong Duality Theorem. The application of duality and the simplex method has proven effective in determining efficient production combinations and minimizing production costs in small-scale businesses.

Keywords: *linear programming; duality; simplex method; production optimization; minimum cost*

ABSTRAK

Permasalahan dalam produksi minuman pada usaha kecil sering terjadi karena keterbatasan bahan baku, waktu produksi, dan biaya operasional sehingga diperlukan kombinasi produksi yang optimal agar biaya dapat diminimumkan. Penelitian ini membahas penerapan dualitas program linier dalam optimasi biaya produksi minuman pada Warung Kopi "Pak Budi" dengan dua variabel keputusan, yaitu produksi Kopi Susu dan Es Kopi. Metode yang digunakan adalah program linier dengan pendekatan dualitas dan metode simpleks untuk menyelesaikan model optimasi. Model primal minimisasi dibentuk berdasarkan kendala ketersediaan biji kopi, susu, es batu, gula, dan waktu produksi, kemudian ditransformasikan ke dalam model dual maksimisasi dan diselesaikan menggunakan metode simpleks. Hasil analisis menunjukkan bahwa solusi optimal diperoleh pada produksi sekitar 2,67 gelas Kopi Susu dan 2 gelas Es Kopi dengan biaya produksi minimum sebesar Rp21.333,33 per hari. Selain itu, nilai optimal model dual sama dengan nilai optimal model primal sehingga membuktikan berlakunya Teorema Dualitas Kuat.

Kata Kunci: program linier; dualitas; metode simpleks; optimasi produksi; biaya minimum.

A. Pendahuluan

Program linear merupakan salah satu metode optimasi matematis yang digunakan untuk menentukan solusi terbaik dari suatu permasalahan dengan mempertimbangkan fungsi tujuan dan berbagai kendala yang ada. Metode ini banyak diterapkan dalam bidang ekonomi, industri, perdagangan, dan manajemen produksi karena mampu membantu proses pengambilan keputusan secara efektif dan efisien, khususnya dalam memaksimalkan keuntungan atau meminimumkan biaya produksi (Makni & Wardana, 2016).

Dalam kegiatan produksi, suatu usaha sering menghadapi keterbatasan sumber daya seperti bahan baku, tenaga kerja, waktu operasional, dan modal. Keterbatasan tersebut menyebabkan pelaku usaha perlu menentukan kombinasi produksi yang tepat agar seluruh kebutuhan produksi tetap terpenuhi tanpa menimbulkan pemborosan biaya. Oleh karena itu, program linear digunakan sebagai alat bantu analisis untuk memperoleh solusi optimal sesuai dengan tujuan yang diinginkan (Saryoko, 2016).

Program linear memiliki dua bentuk model yang saling berkaitan, yaitu model primal dan model dual. Model primal merupakan model awal yang disusun berdasarkan permasalahan nyata, sedangkan model dual diperoleh melalui konsep dualitas. Konsep ini memungkinkan persoalan minimisasi diubah menjadi maksimisasi atau sebaliknya sehingga proses analisis dan penyelesaian model menjadi lebih mudah dilakukan (Chendrawan, 2017).

Hubungan antara model primal dan model dual dijelaskan melalui Teorema Dualitas Kuat yang menyatakan bahwa apabila salah satu

model memiliki solusi optimal, maka model pasangannya juga memiliki solusi optimal dengan nilai fungsi tujuan yang sama. Konsep dualitas tidak hanya digunakan untuk mempermudah proses perhitungan, tetapi juga membantu dalam menganalisis penggunaan sumber daya dan nilai ekonomis dari setiap kendala pada model program linear (Hasibuan et al., 2025).

Salah satu metode yang umum digunakan dalam penyelesaian program linear adalah metode simpleks. Metode ini menyelesaikan persoalan optimasi melalui proses iterasi pada tabel simpleks hingga diperoleh solusi yang optimal. Penggunaan metode simpleks pada model dual sering dianggap lebih efisien, terutama ketika jumlah kendala pada model primal lebih banyak dibandingkan jumlah variabel keputusan sehingga proses perhitungan menjadi lebih sederhana (Makni & Wardana, 2016).

Pada penelitian ini, konsep dualitas dan metode simpleks dual diterapkan pada permasalahan produksi di Warung Kopi "Pak Budi". Warung kopi tersebut memproduksi Kopi Susu dan Es Kopi dengan tujuan meminimumkan biaya produksi harian. Dalam proses produksinya terdapat beberapa kendala, seperti penggunaan biji kopi, susu, es batu, waktu pembuatan, dan gula yang harus dipenuhi agar target produksi tetap tercapai. Permasalahan tersebut dimodelkan ke dalam bentuk program linear minimisasi sebagai model primal, kemudian diubah ke model dual dan diselesaikan menggunakan metode simpleks untuk memperoleh solusi produksi yang optimal dan efisien.

B. Metode Penelitian

Penelitian ini menggunakan metode program linear dengan pendekatan dualitas dan metode simpleks dual untuk menentukan biaya produksi minimum pada Warung Kopi "Pak Budi". Program linear merupakan metode optimasi matematis yang digunakan untuk menentukan solusi terbaik dari suatu permasalahan dengan fungsi tujuan dan kendala berbentuk linear, baik untuk memaksimalkan keuntungan maupun meminimumkan biaya dengan memperhatikan keterbatasan sumber daya (Safitri et al., 2021). Bentuk umum program linear minimisasi adalah:

Min $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$
 dengan kendala:

$$a_{ij}x_j \leq b_i, x_j \geq 0$$

(Bertsimas & Dunn, 2021).

Identifikasi Masalah

Permasalahan pada Warung Kopi "Pak Budi" adalah menentukan biaya produksi minimum dalam pembuatan kopi susu dan es kopi dengan keterbatasan bahan baku, waktu produksi, dan target minimum permintaan pelanggan.

Pengumpulan Data

Data diperoleh melalui observasi sederhana dan studi literatur. Data yang digunakan meliputi kebutuhan bahan baku, waktu produksi, target minimum produksi, dan biaya produksi masing-masing minuman.

Pengolahan Data dan Analisis

Data yang diperoleh diolah ke dalam model program linear dengan menentukan variabel keputusan, fungsi tujuan, dan fungsi kendala. Model primal merupakan bentuk awal persoalan program linear, sedangkan model dual merupakan pasangan dari model primal yang digunakan untuk

mempermudah proses penyelesaian (Maifa et al., 2021).

Pada model primal minimisasi dengan kendala bertipe $\geq$, model dual berbentuk maksimisasi dengan kendala $\leq$ (Susanti, 2021). Bentuk umum model dual adalah:

$$\text{Maks } W = \sum_{i=1}^m b_i y_i$$

dengan kendala:

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \leq c_j, y_i \geq 0$$

(Perkins & Gao, 2023).

Sebelum diselesaikan menggunakan metode simpleks, model program linear diubah ke bentuk standar dengan menambahkan variabel slack, surplus, dan artificial sesuai jenis kendala (Safitri et al., 2021). Fungsi tujuan dalam bentuk standar simpleks dituliskan sebagai:

$$Z - \sum_{j=1}^n c_j x_j = 0$$

(Huiberts et al., 2022).

Metode simpleks digunakan untuk memperoleh solusi optimal melalui proses iterasi tabel simpleks dengan menentukan variabel masuk, variabel keluar, dan elemen pivot (Voulgaropoulou et al., 2022). Kondisi optimal dicapai apabila:

$$C_j - Z_j \geq 0$$

(Gondzio, 2023).

Selain itu, penelitian ini juga menggunakan metode dual simpleks, yaitu metode yang digunakan ketika solusi awal telah optimal tetapi belum feasible. Proses iterasi dilakukan dengan memperbaiki nilai ruas kanan negatif hingga diperoleh solusi feasible dan optimal (Goli & Nasser, 2021). Pemilihan kolom kunci dilakukan menggunakan rasio:

$$\frac{C_j - Z_j}{a_{ij}}, a_{ij} < 0$$

(Perkins & Gao, 2023).

Implementasi Model

Model matematis dibentuk berdasarkan kondisi nyata produksi Warung Kopi “Pak Budi”, yang terdiri atas variabel keputusan jumlah produksi kopi susu dan es kopi, fungsi tujuan minimisasi biaya produksi, serta fungsi kendala berdasarkan keterbatasan sumber daya.

Evaluasi Hasil

Evaluasi dilakukan dengan menganalisis solusi optimal yang diperoleh dari metode simpleks dual. Dalam penelitian ini digunakan Teorema Dualitas Kuat yang menyatakan bahwa nilai optimal model primal dan dual adalah sama, yaitu:

$$W^* = Z^*$$

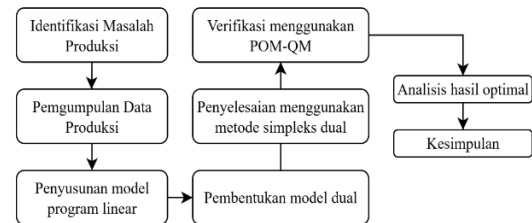
(Perkins & Gao, 2023). Selain itu, solusi juga memenuhi kondisi *complementary slackness*:

$$y_i(b_i - A_i x) = 0$$

$$x_i(c_i - A_j^T y) = 0$$

(Im & Wolkowicz, 2022). Teorema tersebut digunakan untuk memastikan bahwa solusi yang

diperoleh benar-benar optimal dan sesuai dengan kondisi produksi nyata.



Gambar 1. Flow Chart Langkah Langkah Penelitian

C. Hasil Penelitian dan Pembahasan

Pak Budi menjual Kopi Susu dan Es Kopi. Ia ingin mengetahui biaya produksi minimum harian sambil memenuhi target permintaan pelanggan. Masalah ini adalah minimisasi dengan 5 kendala $\geq$, diselesaikan lewat Dualitas $\rightarrow$ Model Dual $\rightarrow$ Simpleks Dual.

1. Model Primal (Minimisasi)

Variabel keputusan:

X_1 = jumlah gelas Kopi Susu diproduksi per hari

X_2 = jumlah gelas Es Kopi diproduksi per hari

Tabel 1 Data Produksi

Kendala	Kopi Susu (X_1)	Es Kopi (X_2)	Min. terpenuhi
(C1) Biji kopi (sdm)	3	2	≥ 12
(C2) Susu (ml per 100)	4	1	≥ 8
(C3) Es batu (balok)	0	5	≥ 10
(C4) Waktu buat (menit)	6	4	≥ 24
(C5) Gula (sdm)	2	3	≥ 9
Biaya / gelas (Rp)	5.000	4.000	

Formulasi primal

$$\text{Min } Z = 5.000 X_1 + 4.000 X_2$$

$$3X_1 + 2X_2 \geq 12 \dots (C1)$$

$$4X_1 + X_2 \geq 8 \dots (C2)$$

$$5X_2 \geq 10 \dots (C3)$$

$$6X_1 + 4X_2 \geq 24 \dots (C4)$$

$$2X_1 + 3X_2 \geq 9 \dots (C5)$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

2. Pembentukan Model Dual

Aturan Dualitas: Primal Minimisasi (kendala $\geq$) $\rightarrow$ Dual Maksimisasi (kendala $\leq$). Setiap kendala primal menjadi 1 variabel dual (Y), setiap variabel primal menjadi 1 kendala dual.

Tabel 2 Aturan Konversi Primal Dual

Primal (Min)	$\rightarrow$	Dual (Max)
5 kendala (C1–C5)	$\rightarrow$	5 variabel dual: Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5
2 variabel (X_1, X_2)	$\rightarrow$	2 kendala dual
Koef. fungsi tujuan: 5000, 4000	$\rightarrow$	RHS kendala dual: 5000, 4000
RHS primal: 12, 8, 10, 24, 9	$\rightarrow$	Koef. fungsi tujuan dual: 12, 8, 10, 24, 9
Matriks koefisien A (5×2)	$\rightarrow$	Transpose A^T (2×5)
Kendala $\geq$	$\rightarrow$	Variabel dual $Y \geq 0$

Model dual lengkap

$$\text{Maks } W = 12Y_1 + 8Y_2 + 10Y_3 + 24Y_4 + 9Y_5$$

$$3Y_1 + 4Y_2 + 0Y_3 + 6Y_4 + 2Y_5 \leq 5.000$$

... (D1, dari X_1)

$$2Y_1 + 1Y_2 + 5Y_3 + 4Y_4 + 3Y_5 \leq 4.000$$

... (D2, dari X_2)

$$Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5 \geq 0$$

Teorema Dualitas Kuat Nilai optimal dual W^* = nilai optimal primal Z^*

$$3Y_1 + 4Y_2 + 0Y_3 + 6Y_4 + 2Y_5 + S_1 = 5.000 \dots (D1)$$

$$2Y_1 + 1Y_2 + 5Y_3 + 4Y_4 + 3Y_5 + S_2 = 4.000 \dots (D2)$$

Fungsi tujuan bentuk implisit:

$$W - 12Y_1 - 8Y_2 - 10Y_3 - 24Y_4 - 9Y_5 = 0$$

Basis awal: $S_1 = 5.000, S_2 = 4.000 \rightarrow$ semua NK positif $\rightarrow$ solusi awal layak $\rightarrow$ Simpleks biasa (bukan dual simplex) digunakan pada model dual ini.

3. Bentuk Standar Model Dual (Siap Simpleks)

Tambahkan slack variable S_1, S_2 pada tiap kendala $\leq$ dual:

Tabel 3 Simpleks Awal (Model Dual)

Basis	W	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	S_1	S_2	NK	Rasio
W	1	-12	-8	-10	-24	-9	0	0	0	—
S_1	0	3	4	0	6	2	1	0	5000	$5000/6 = 833$
S_2	0	2	1	5	4	3	0	1	4000	$4000/4 = 1000$

Kolom kunci Y_4 (koef. baris W paling negatif = -24)
 Baris kunci S_1 (rasio terkecil = 833) | Elemen pivot = 6

Iterasi 1: Y_4 Masuk, S_1 Keluar
 Bagi baris S_1 dengan pivot = 6 $\rightarrow$ baris baru Y_4 :
 Baris Y_4 = Baris $S_1 \div 6$

Tabel 4 Iterasi 1

Operasi	W	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	S_1	S_2	NK
S_1 lama	0	3	4	0	6	2	1	0	5000
$\div 6 \rightarrow Y_4$ baru	0	1/2	2/3	0	1	1/3	1/6	0	2500/3

Perbarui baris W dan S_2 :
 Baris W baru = Baris W lama - (-24) $\times$ Baris Y_4 baru

Baris S_2 baru = Baris S_2 lama - (4) $\times$ Baris Y_4 baru

Tabel 5 Iterasi 1 Tabel Baru

Basis	W	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	S_1	S_2	NK	Rasio
W	1	0	8	-10	0	-1	4	0	20000	—
Y_4	0	1/2	2/3	0	1	1/3	1/6	0	833,3	—
S_2	0	0	-5/3	5	0	5/3	-2/3	1	666,7	666,7/5 = 133,3

Kolom kunci Y_3 (koef. baris W paling negatif = -10)
 Baris kunci S_2 (rasio terkecil = 133,3) | Elemen pivot = 5

Iterasi 2: Y_3 Masuk, S_2 Keluar
 Bagi baris S_2 dengan pivot = 5 $\rightarrow$ baris baru Y_3 :
 Baris Y_3 = Baris $S_2 \div 5$

Tabel 6 Iterasi 2

Operasi	W	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	S_1	S_2	NK
S_2 lama	0	0	-5/3	5	0	5/3	-2/3	1	666,7
$\div 5 \rightarrow Y_3$ baru	0	0	-1/3	1	0	1/3	-2/15	1/5	133,3

Perbarui baris W dan Y_4 :
 Baris W baru = Baris W - (-10) $\times$ Baris Y_3 baru

Baris Y_4 baru = Baris Y_4 - (0) $\times$ Baris Y_3 baru $\rightarrow$ tidak berubah

Tabel 7 Iterasi 2 Tabel Baru

Basis	W	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	S_1	S_2	NK
W	1	0	44/15	0	0	7/3	2/3	2	21333,3
Y_4	0	1/2	2/3	0	1	1/3	1/6	0	833,3
Y_3	0	0	-1/3	1	0	1/3	-2/15	1/5	133,3

Semua koefisien baris $W \geq 0 \rightarrow$ Solusi optimal tercapai!

Tabel 8 Solusi Optimal Model Dual

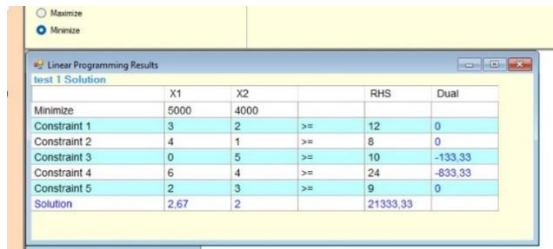
Variabel	Status	Nilai
Y_3 (Es batu)	Basis	133,3
Y_4 (Waktu buat)	Basis	833,3
Y_1, Y_2, Y_5	Non-basis	0
S_1, S_2	Non-basis	0
$W^* = Z^*$ (nilai optimal)		Rp 21.333,-

Karena Teorema Dualitas Kuat berlaku: $W^* = Z^* = \text{Rp } 21.333,-/\text{hari}$

Tabel 9 Membaca Solusi Primal dari Tabel Dual

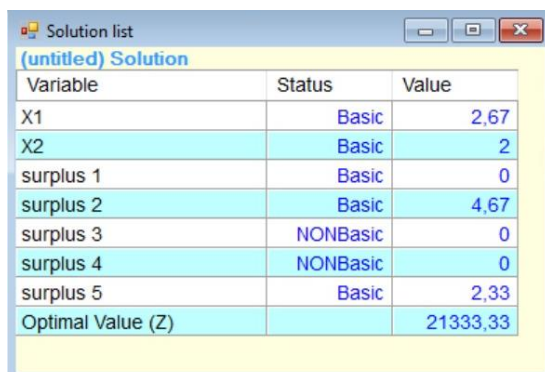
Variabel Primal	Dibaca dari kolom	Nilai baris W optimal	Nilai X
X_1 (Kopi Susu)	S_1	2/3	2/3 = 0,67 gelas
X_2 (Es Kopi)	S_2	2	2 gelas

4. Penyelesaian Menggunakan Pom



	X1	X2	RHS	Dual
Minimize	5000	4000		
Constraint 1	3	2	>= 12	0
Constraint 2	4	1	>= 8	0
Constraint 3	0	5	>= 10	-133.33
Constraint 4	6	4	>= 24	-833.33
Constraint 5	2	3	>= 9	0
Solution	2.67	2		21333.33

Dengan tabel surplus



Variable	Status	Value
X1	Basic	2,67
X2	Basic	2
surplus 1	Basic	0
surplus 2	Basic	4,67
surplus 3	NONBasic	0
surplus 4	NONBasic	0
surplus 5	Basic	2,33
Optimal Value (Z)		21333,33

Perbedaan hasil antara HTML dan POM-QM terjadi karena perbedaan konvensi tanda pada nilai dual (*shadow price*). Pada HTML nilai

dual ditampilkan positif sesuai teori, sedangkan pada POM-QM bernilai negatif karena model berbentuk minimisasi dengan kendala " $\geq$ ". Selain itu, HTML mengalami kesalahan dalam membaca solusi primal sehingga menghasilkan nilai yang tidak konsisten. Setelah diverifikasi menggunakan POM-QM, solusi optimal yang benar adalah $X_1 = 2,67$, $X_2 = 2$, dan $Z = 21.333,33$.

Berdasarkan metode simpleks dan aplikasi POM-QM, diperoleh nilai optimal $W^* = Z^* = \text{Rp } 21.333$. Nilai ini menunjukkan biaya produksi minimum yang harus dikeluarkan Pak Budi untuk memenuhi seluruh kendala produksi, seperti kebutuhan biji kopi, susu, es batu, gula, dan waktu pembuatan. Jika biaya lebih kecil dari nilai tersebut, maka ada kemungkinan kebutuhan minimum produksi tidak terpenuhi. Karena menggunakan konsep dualitas program linear, nilai optimal model primal dan dual adalah sama sesuai Teorema Dualitas Kuat.

D. Kesimpulan dan Saran

Penelitian ini membahas penerapan dualitas program linier dan metode simpleks untuk mengoptimalkan biaya produksi minuman pada Warung Kopi “Pak Budi”. Hasil analisis menunjukkan bahwa model program linier mampu menentukan kombinasi produksi optimal dengan biaya minimum sebesar Rp21.333,33 per hari, yaitu sekitar 2,67 gelas Kopi Susu dan 2 gelas Es Kopi. Model primal minimisasi ditransformasikan ke model dual maksimisasi dan menghasilkan nilai optimal yang sama, sehingga membuktikan berlakunya Teorema Dualitas Kuat. Penerapan dualitas dan metode simpleks dinilai efektif dalam membantu pengambilan keputusan produksi berdasarkan keterbatasan sumber daya. Namun, penelitian ini masih terbatas pada sedikit variabel dan jenis produk, sehingga penelitian selanjutnya disarankan menambahkan variabel produksi, mempertimbangkan perubahan harga bahan baku, dan menggunakan metode optimasi lain agar hasil lebih komprehensif.

DAFTAR PUSTAKA

- Bertsimas, D., & Dunn, J. (2021). *Optimization and Data Science in Linear Programming*. Operations Research Journal.
- Chendrawan, T. S. (2017). Teorema Amplop dan Dualitas The Structure of Economics, Silberberg. *Tirtayasa Ekonomika*, 12(2), 315–340.
- Goli, M., & Nasser, S. H. (2021). *Extension of Duality Results and a Dual Simplex Method for Linear Programming Problems With Intuitionistic Fuzzy Variables*. Fuzzy Information and Engineering.
- Gondzio, J. (2023). *Advances in Linear Optimization Methods*. European Journal of Operational Research.
- Hasibuan, C. K., Sahara, R., Dalimunte, R. A., & Ginting, S. S. B. (2025). Analisis Teori Dualitas dalam Program Linier: Konsep, Implikasi, dan Aplikasinya. *Jurnal Ilmu Tarbiyah dan Keguruan (JITK)*, 3(2), 149–169.
- Huiberts, S., Lee, Y. T., & Zhang, X. (2022). *Upper and Lower Bounds on the Smoothed Complexity of the Simplex Method*. arXiv.
- Im, J., & Wolkowicz, H. (2022). *Revisiting Degeneracy, Strict Feasibility, Stability in Linear Programming*. arXiv.
- Lina, T. N., Rumetna, M. S., Pangaribuan, E. A. W., Permana, M., Mambrasar, Y., Martvie, N., Magdalena, M., Tambayong, H., Kaliele, J., & Tangmerun, D. (2021). Premium Dan Peralite Menggunakan Metode Maximization Of Profit On Premium And Peralite Businesses Using Simplex Methods And Pom-Qm. *Elektro Luceat*, 7(1), 1–9.
- Maifa, T. S., Garak, S. S., & Dominikus, W. S. (2021). *Implementasi Bentuk Dualitas dan Analisa Sensitivitas Masalah Goal Programming*. RANGE Jurnal Pendidikan Matematika.

- Makni, J., & Wardana, H. (2016). Pemodelan Minimasi Biaya Produksi Menggunakan Metode Simpleks. *Informatics for Educators and Professionals*, 1(1), 27–36.
- Perkins, P. T., & Gao, X. (2023). *Dual Dictionaries in Linear Programming*. arXiv.
- Safitri, E., Basriati, S., & Andiani, E. (2021). Penerapan Program Linier Menggunakan Metode Dual Simpleks dan Metode Quick Simpleks untuk Meminimumkan Biaya. *Journal of Fundamental Mathematics and Applications*.
- Saryoko, A. (2016). Metode Simpleks Dalam Optimalisasi Hasil Produksi. *Informatics for Educators and Professionals*, 1(1), 27–36.
- Susanti, V. (2021). Optimalisasi Produksi Tahu Menggunakan Program Linear Metode Simpleks. *MATHunesa: Jurnal Ilmiah Matematika*.
- Voulgaropoulou, S., Samaras, N., & Ploskas, N. (2022). *Predicting the Execution Time of the Primal and Dual Simplex Algorithms Using Artificial Neural Networks*. *Mathemati*