Pendas : Jurnal Ilmiah Pendidikan Dasar,
ISSN Cetak : 2477-2143 ISSN Online : 2548-6950
Volume 10 Nomor 04, Desember 2025

ANALISIS KRITIS BUKU CLP-3 MULTIVARIABLE CALCULUS: KEKUATAN PEDAGOGIS, KESALAHAN KONSEPTUAL, DAN IMPLIKASI BAGI PEMBELAJARAN KALKULUS MULTIVARIABEL

Suwanto[1], Samuel Tappin Martua Sitorus[2], Iren Kurnia Nadapdap [3], Sergi Br Sembiring[4], Ester Fransiska Nababan[5], Mukhtar[6]

Departemen of Mathematic Education, Medan State University

Jl. Willem Iskandar Pasar V Medan Estate, Medan Indonesia

Email: suwantompd89@gmail.com, samuelsitorus101105@gmail.com, irennadapdap89@gmail.com, sergimilala@gmail.com, esterfransiskanababan@gmail.com, mukhtardr.mt@gmail.com

ABSTRAK

Artikel ini menyajikan analisis kritis terhadap buku CLP-3 Multivariable Calculus karya Feldman, Rechnitzer, dan Yeager dengan fokus pada kekuatan pedagogis, potensi kesalahan konseptual, dan implikasinya bagi pembelajaran Kalkulus Multivariabel. Penelitian ini menggunakan pendekatan kualitatif melalui analisis dokumen, dengan menelaah secara sistematis struktur bab, alur penyajian materi, representasi konsep kunci (limit multivariabel, turunan parsial, gradien, optimasi, dan integral lipat), serta konsistensi notasi dan ketepatan rumus. Analisis dilengkapi dengan perbandingan terhadap beberapa buku dan sumber kalkulus multivariabel lain yang diakui secara luas.Hasil kajian menunjukkan bahwa CLP-3 Multivariable Calculus memiliki sejumlah kekuatan utama, antara lain struktur materi yang runtut, keterkaitan yang kuat dengan kalkulus satu variabel melalui strategi daur ulang konsep, penggunaan visualisasi geometris dan alat bantu prosedural (misalnya tree diagrams untuk Chain Rule), serta kelimpahan latihan yang disertai petunjuk dan solusi. Di sisi lain, ditemukan beberapa kelemahan, seperti status buku yang masih bersifat work in progress, ketergantungan pada seri CLP sebelumnya, penempatan konsep penting (misalnya Jacobian dalam koordinat umum) sebagai materi opsional, serta sejumlah ketidaktepatan notasi, rumus, dan penulisan yang berpotensi menimbulkan miskonsepsi. Implikasi dari temuan tersebut adalah bahwa CLP-3 Multivariable Calculus tetap layak digunakan sebagai buku ajar utama pada mata kuliah Kalkulus Multivariabel yang berorientasi pada pemahaman konseptual dan pembuktian, dengan syarat penggunaannya disertai klarifikasi konsep oleh dosen, pemanfaatan lembar errata, serta integrasi dengan bahan pendamping yang menyesuaikan konteks mahasiswa. Selain itu, analisis ini menegaskan pentingnya peninjauan kritis terhadap buku teks matematika sebelum dan selama digunakan dalam proses pembelajaran.

Kata Kunci: Kalkulus Multivariabel, Buku Teks Matematika, CLP-3 Multivariable Calculus, Analisis Kritis, Analisis Kesalahan, Pembelajaran Kalkulus.

ABSTRACT

This article presents a critical analysis of the textbook CLP-3 Multivariable Calculus by Feldman, Rechnitzer, and Yeager, with a focus on its pedagogical strengths, potential conceptual weaknesses, and implications for teaching multivariable calculus. The study employs a qualitative document analysis approach, examining in detail the structure of the chapters, the flow of topic presentation, the representation of key concepts (such as multivariable limits, partial derivatives, gradients, optimization, and multiple integrals), as well as the consistency of notation and the correctness of formulas. The analysis is complemented by comparisons with several widely used multivariable calculus textbooks and other reference sources.The findings indicate that CLP-3 Multivariable Calculus possesses several major strengths, including a coherent and well-structured progression of topics, a strong connection to single-variable calculus through the recycling of previously established concepts, extensive use of geometric visualization and procedural tools (for example, tree diagrams for the Chain Rule), and a rich collection of exercises supported by hints and fully worked solutions. On the other hand, some weaknesses are also identified, such as the book's status as a work in progress, its substantial dependence on earlier volumes in the CLP series, the placement of certain important concepts (such as the general Jacobian for change of variables) in optional sections, and various inaccuracies in notation, formulas, and wording that may lead to misconceptions. These results imply that CLP-3 Multivariable Calculus is appropriate for use as a primary textbook in multivariable calculus courses that emphasize conceptual understanding and proof-based reasoning, provided that its use is accompanied by conceptual clarifications from instructors, reference to updated errata, and integration with supplementary materials adapted to the students' context. More broadly, this analysis underscores the importance of subjecting mathematics textbooks to critical review before and during their use in instruction.

Keywords: *Multivariable Calculus, Mathematics Textbook, CLP-3 Multivariable Calculus, Critical Analysis, Error Analysis, Calculus Teaching.*

PENDAHULUAN

Pembelajaran Kalkulus Multivariabel (*Multivariable Calculus*) merupakan tahap lanjutan dari kalkulus dasar yang memperkenalkan konsep seperti fungsi dari beberapa variabel, turunan parsial, gradien, integral ganda/permukaan/volume, serta penerapan dalam geometri dan analisis vektor. Penguasaan materi ini tidak hanya penting bagi mahasiswa program matematika atau ilmu terapan, tetapi juga menjadi dasar bagi banyak bidang sains dan teknik. Pemahaman konsep integral permukaan dalam mata kuliah Kalkulus Vektor masih menjadi tantangan signifikan bagi banyak mahasiswa di perguruan tinggi. Materi ini tidak hanya menuntut penguasaan kalkulus dasar, tetapi juga kemampuan visualisasi spasial serta penerapan konsep multivariat dalam ruang tiga dimensi. Berdasarkan pengamatan awal, topik integral permukaan sering kali menjadi hambatan dalam proses pembelajaran mahasiswa program studi pendidikan Temuan (Muhassanah & Lukman, 2021), menunjukkan bahwa mahasiswa kerap mengalami miskonsepsi ketika mempelajari integral ganda dan integral permukaan. Mereka kesulitan menghubungkan konsep-konsep abstrak dengan representasi geometrisnya. Sebagai contoh, banyak mahasiswa memahami integral permukaan sekadar sebagai perluasan dari integral biasa, tanpa mempertimbangkan orientasi vektor normal atau hubungannya dengan teorema-teorema penting seperti Teorema Gauss. Aspek afektif juga turut memengaruhi proses belajar mahasiswa. Penelitian oleh (Salafiya et al., 2025), menunjukkan bahwa mahasiswa dengan tingkat kecemasan tinggi terhadap matematika cenderung menghindari materi integral vektor karena menganggapnya sebagai bagian tersulit dari kurikulum kalkulus. Kecemasan ini berdampak pada rendahnya motivasi belajar dan performa akademik. Sementara itu, pendekatan berbasis eksplorasi dan pemecahan masalah seperti yang disarankan oleh (Allolayuk et al., 2023), terbukti lebih efektif dalam meningkatkan pemahaman konseptual mahasiswa dibandingkan pendekatan konvensional. Dalam konteks ini, *CLP-3 Multivariable Calculus* menjadi salah satu buku ajar open-access yang banyak digunakan karena penyusunan materi yang sistematis, penggunaan ilustrasi geometris yang efektif, serta keberagaman soal yang mendukung pendalaman konsep. Oleh karena itu, analisis kritis terhadap CLP-3 menjadi penting untuk meninjau ketepatan matematika, konsistensi simbolik, dan kejelasan representasi konsep yang disajikan, serta membandingkannya dengan literatur standar seperti Stewart, Strang, dan OpenStax guna memperoleh verifikasi teoretis yang kuat. Melalui pendekatan tersebut, penelitian ini berupaya memberikan kontribusi ilmiah berupa kajian objektif mengenai kualitas buku CLP-3 serta rekomendasi yang dapat memperkuat efektivitas pembelajaran kalkulus multivariabel di lingkungan pendidikan tinggi.

KAJIAN TEORITIS

Peran Buku Teks dalam Pembelajaran Matematika

Dalam pendidikan matematika, buku teks menempati posisi yang sangat penting sebagai sumber utama materi, contoh, dan latihan, sekaligus sebagai instrumen yang membentuk praktik pengajaran dan kesempatan belajar siswa. Berbagai kajian menunjukkan bahwa buku teks dan sumber kurikulum lain berperan sebagai "instrumen perubahan" yang memengaruhi isi matematika yang diajarkan, tujuan instruksional, dan cara siswa membangun pengetahuan matematis (Rezat, Fan, & Pepin, 2021). Penelitian lain menegaskan bahwa rancangan isi dan struktur buku teks berkontribusi langsung pada kualitas kesempatan belajar yang diterima siswa, sehingga kualitas buku teks menjadi faktor strategis dalam peningkatan mutu pembelajaran matematika.

Dari perspektif penggunaan di kelas, buku teks tidak hanya mengarahkan guru dalam menyusun urutan materi dan memilih contoh, tetapi juga berfungsi sebagai alat belajar utama bagi mahasiswa/siswa di luar jam tatap muka. Studi tentang pemanfaatan buku teks oleh siswa, misalnya, menunjukkan bahwa buku digunakan secara aktif sebagai instrumen untuk belajar mandiri baik untuk membaca penjelasan konsep, menelusuri contoh, maupun menyelesaikan tugas (Rezat, 2006). Hal ini menegaskan bahwa kesalahan atau kelemahan dalam buku teks berpotensi menyebar luas menjadi miskonsepsi jika tidak dikritisi. Dalam konteks tersebut, analisis kritis terhadap buku teks matematika, termasuk buku kalkulus multivariabel, menjadi bagian penting dari upaya meningkatkan kualitas pembelajaran di perguruan tinggi.

Analisis Buku Teks Matematika

Analisis buku teks (textbook analysis) telah berkembang menjadi bidang kajian tersendiri dalam pendidikan matematika. Sejumlah kerangka analisis telah dikembangkan untuk menelaah isi dan representasi dalam buku teks, baik secara kuantitatif maupun kualitatif. Sebagai contoh, kajian terkini menawarkan kerangka analisis isi kualitatif yang menekankan pentingnya mengidentifikasi tema, struktur tugas, dan representasi matematika dalam buku teks untuk menilai sejauh mana buku tersebut mendukung tujuan pembelajaran tertentu (Fan et al., 2022). Pendekatan lain, seperti *praxeological-didactical analysis* (PDA), memandang buku teks sebagai produk praktik sosial yang memuat jenis-jenis tugas, teknik, dan justifikasi teoritis tertentu, sehingga memungkinkan peneliti menelaah orientasi pedagogis dan asumsi didaktik yang diimplikasikan oleh teks (Kustati et al., 2019).

Dalam konteks Indonesia, berbagai studi juga telah menganalisis buku teks matematika sekolah dengan fokus beragam: mulai dari jenis tugas fungsional yang diberikan, orientasi pedagogis soal-soal, hingga kesesuaian dengan kerangka asesmen internasional seperti PISA. Secara umum, penelitian-penelitian ini menunjukkan bahwa analisis buku teks dapat mengungkap kecenderungan penting, seperti dominasi soal rutin, kurangnya konteks dunia nyata, atau ketidakseimbangan antara pemahaman konseptual dan prosedural. Dengan demikian, analisis kritis terhadap buku teks kalkulus multivariabel seperti CLP-3 dapat diposisikan dalam tradisi penelitian textbook analysis yang menilai keakuratan konsep, konsistensi notasi, kualitas representasi, dan orientasi pedagogis.

Konsep-Konsep Kunci dalam Kalkulus Multivariabel

Kalkulus multivariabel mencakup sejumlah konsep inti yang secara inheren lebih kompleks daripada analog satu variabel, antara lain fungsi beberapa variabel, limit multivariabel, turunan parsial dan gradien, bidang singgung, optimasi dengan kendala, dan integral lipat beserta perubahan koordinat. Buku-buku kalkulus multivariabel arus utama baik komersial maupun *open textbook* secara konsisten menempatkan topik-topik tersebut sebagai pilar utama materi semester ketiga kalkulus (misalnya Strang & Herman, 2016; Boelkins, Schlicker, & Austin, 2017).

Misalnya, *Calculus: Volume 3* terbitan OpenStax memulai pembahasan multivariabel dengan fungsi beberapa variabel, vektor, dan interpretasi geometris permukaan, sebelum berlanjut ke turunan parsial, gradien, dan integral lipat dalam berbagai sistem koordinat. Demikian pula, *Active Calculus-Multivariable* menekankan peran aktivitas dan pertanyaan pemantik dalam membantu mahasiswa membangun pemahaman sendiri tentang limit multivariabel, turunan arah, dan integral ganda/tiga, dengan tetap mengaitkan konsep tersebut pada visualisasi grafis dan konteks aplikasi. Di banyak teks, limit multivariabel dan gradien digarisbawahi sebagai titik-titik konseptual yang sensitif: limit harus sama untuk semua arah pendekatan, dan gradien memiliki peran ganda sebagai vektor derivatif dan vektor normal level surface. Kekeliruan kecil dalam definisi, syarat teorema, atau notasi pada bagian-bagian ini mudah sekali berkembang menjadi miskonsepsi yang mengganggu pemahaman lanjutan.

Open Textbook dan Karakteristik CLP-3

Dalam dua dekade terakhir, muncul gerakan *open educational resources* (OER) dan *open textbooks* yang menyediakan buku ajar berlisensi terbuka dan dapat diakses gratis oleh mahasiswa dan dosen. Di bidang kalkulus, contoh penting adalah *Calculus* (OpenStax) dan seri *Active Calculus*, yang keduanya tersedia secara bebas dalam format PDF maupun HTML, serta dilengkapi berbagai sumber daya pendukung untuk pengajar. Di dalam ekosistem yang sama, *CLP-3 Multivariable Calculus* karya Feldman, Rechnitzer, dan Yeager dikembangkan sebagai bagian dari proyek CLP (Calculus Learning Project) di University of British Columbia dan dirilis dengan lisensi Creative Commons BY-NC-SA.

Secara garis besar, CLP-3 mencakup bab-bab tentang vektor dan geometri ruang dua–tiga dimensi, turunan parsial, dan integral multivariabel, serta dilengkapi *problem book* dan versi gabungan teks–latihan yang juga dapat diakses secara daring. Karakteristik khas CLP-3 adalah statusnya sebagai *living document* yang terus direvisi dan diperbaiki, serta struktur latihan yang dikelompokkan dalam beberapa tahap untuk mengembangkan pemahaman konsep sekaligus keterampilan komputasi. Di satu sisi, sifat terbuka dan terus berkembang ini memberikan fleksibilitas dan aksesibilitas tinggi, khususnya bagi perguruan tinggi dengan keterbatasan sumber daya; di sisi lain, status "work in progress" juga membuka kemungkinan bahwa versi tertentu masih mengandung kesalahan konseptual maupun teknis yang belum sepenuhnya terjaring oleh proses editorial. Dalam konteks inilah analisis kritis terhadap CLP-3 menjadi relevan: untuk menilai kekuatan pedagogisnya sekaligus mengidentifikasi area yang memerlukan klarifikasi agar buku dapat dimanfaatkan secara optimal dalam pembelajaran kalkulus multivariabel.

METODE PENELITIAN

Penelitian ini menggunakan pendekatan deskriptif kualitatif dengan metode analisis isi (*content analysis*) untuk menelaah buku CLP-3 Multivariable Calculus karya Feldman, Rechnitzer, dan Yeager. Analisis dilakukan terhadap keseluruhan isi buku, termasuk definisi, teorema, contoh, latihan, hingga solusi yang tercantum dalam *Problem Book*. Data utama penelitian berupa materi yang terdapat pada buku CLP-3 edisi terbaru (kompilasi 2021–2022), sedangkan data pendukung diperoleh dari literatur kalkulus multivariabel lain yang relevan seperti Stewart, Strang, OpenStax Calculus Volume 3, serta catatan resmi errata CLP. Pengumpulan data dilakukan melalui pembacaan mendalam dan penandaan setiap bagian yang berpotensi mengandung ketidaktepatan, meliputi kesalahan konsep, notasi, ejaan, konsistensi simbol, serta kesalahan formulasi matematis. Temuan tersebut kemudian diverifikasi dengan membandingkannya terhadap teori standar dari buku acuan serta rujukan matematis yang sah.

Analisis data dilaksanakan secara berurutan dengan mengklasifikasikan temuan ke dalam kategori tertentu seperti kesalahan konsep (misalnya syarat gradien non-nol pada vektor normal yang tidak dicantumkan), kesalahan rumus (seperti hubungan φ dengan koordinat Kartesius dalam koordinat bola), kesalahan terminologi (misalnya penggunaan kata line pada konteks bidang), kesalahan notasi (seperti percampuran titik tetap dan variabel pada rumus bidang singgung), hingga kesalahan teknis berupa salah ketik dan mislabeled pada *Problem Book*. Setiap temuan dianalisis berdasarkan konteks pemunculannya, dampaknya terhadap pemahaman mahasiswa, serta rujukan teoretis yang membenarkan koreksi tersebut.

Untuk memastikan keakuratan analisis, penelitian ini memanfaatkan triangulasi sumber, yaitu dengan meninjau kembali tiap temuan melalui buku teks standar internasional, sumber-sumber *open access,* serta errata resmi CLP-3. Prosedur penelitian dilakukan secara sistematis mulai dari pengumpulan isi buku, identifikasi kesalahan, perbandingan teori, analisis dampak pedagogis, hingga penyusunan rekomendasi perbaikan. Melalui metode ini, penelitian berupaya memberikan gambaran yang objektif mengenai kekuatan dan kelemahan buku CLP-3, serta menyediakan catatan kritis yang dapat digunakan sebagai bahan evaluasi dalam pembelajaran kalkulus multivariabel di perguruan tinggi.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Kekuatan Pedagogis Buku *CLP-3 Multivariable Calculus*

Secara umum, *CLP-3 Multivariable Calculus* memiliki beberapa kekuatan pedagogis yang menonjol. Pertama, struktur materinya runtut: dimulai dari vektor dan geometri ruang, dilanjutkan ke fungsi beberapa variabel dan turunan parsial, dan diakhiri dengan integral lipat serta perubahan koordinat. Urutan ini membantu mahasiswa membangun pemahaman dari fondasi geometris menuju analisis lokal dan aplikasi integrasi multivariabel.

Kedua, buku ini mengintegrasikan koneksi antara kalkulus satu variabel dan multivariabel melalui strategi "daur ulang" konsep. Banyak definisi dan teknik yang sudah familiar di kalkulus satu variabel digeneralisasi secara eksplisit ke dimensi lebih tinggi, sehingga transisi materi menjadi lebih halus bagi mahasiswa.

Ketiga, penggunaan visualisasi dan alat bantu prosedural cukup kuat. Diagram pohon untuk *Chain Rule*, sketsa *level curves* dan *quadric surfaces*, serta interpretasi geometris turunan parsial dan gradien membantu mahasiswa mengaitkan simbol dengan gambaran ruang tiga dimensi. Keempat, sifat buku sebagai *open textbook* dengan lisensi Creative Commons, disertai keberadaan *problem book*, hint, dan solusi, menjadikannya sumber belajar yang mudah diakses dan mendukung belajar mandiri.

Kelemahan dan Keterbatasan Buku

Di samping berbagai kekuatan yang dimiliki, *CLP-3 Multivariable Calculus* juga menunjukkan beberapa kelemahan dan keterbatasan penting. Pertama, buku ini secara eksplisit dinyatakan sebagai *living document* yang masih berada pada tahap *testing and changes*. Status ini memang membuka ruang perbaikan berkelanjutan, tetapi sekaligus berarti bahwa pembaca berpotensi menjumpai kesalahan notasi, rumus, maupun rujukan yang belum terkoreksi di dalam teks utama. Hal ini menuntut dosen dan mahasiswa untuk secara aktif merujuk pada daftar errata dan tidak memperlakukan buku sebagai sumber yang sepenuhnya final.

Kedua, *CLP-3* memiliki ketergantungan yang cukup kuat pada seri sebelumnya (CLP-1 dan CLP-2). Banyak penjelasan dan teorema diringkas dengan asumsi bahwa pembaca sudah familiar dengan notasi, teknik komputasi, dan pembuktian yang dibahas di buku-buku terdahulu. Bagi institusi atau kelas yang tidak menggunakan seri CLP secara lengkap, hal ini dapat menyebabkan sebagian mahasiswa merasa "ditinggal" karena beberapa detail prasyarat hanya dirujuk secara singkat tanpa penjelasan ulang yang memadai.

Ketiga, sejumlah konsep yang sebenarnya penting untuk pemahaman lanjutan ditempatkan sebagai materi opsional, misalnya pembahasan Jacobian dalam koordinat umum atau contoh optimasi dengan lebih dari satu kendala. Jika bagian-bagian ini diabaikan, mahasiswa berisiko menguasai teknik tanpa memahami kerangka teoretis yang melandasinya, padahal konsep tersebut sering muncul kembali pada mata kuliah lanjut seperti persamaan diferensial, analisis vektor, atau mekanika. Di samping itu, masih ditemukan beberapa ketidakkonsistenan notasi, pelabelan, dan redaksi yang, meskipun sebagian bersifat teknis, tetap berpotensi mengganggu keterbacaan dan memicu miskonsepsi bila tidak diklarifikasi oleh pengajar.

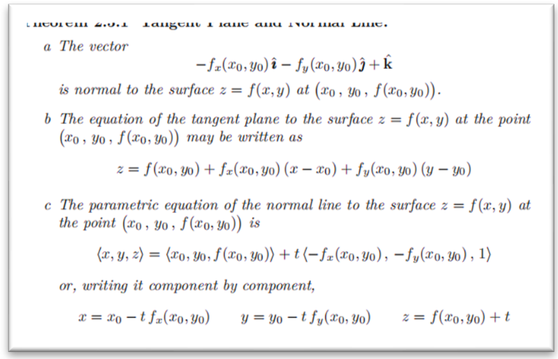
Temuan Kesalahan Konseptual dan Teknis

A. Kesalahan Konseptual

Analisis terhadap isi buku dan problem book CLP-3 Multivariable Calculus mengidentifikasi sebelas kesalahan yang dapat dikelompokkan ke dalam dua kategori utama, yaitu kesalahan konseptual/rumus dan kesalahan teknis/redaksional. Kesalahan konseptual dan rumus berkaitan langsung dengan kebenaran definisi, syarat teorema, serta hubungan koordinat, sedangkan kesalahan teknis meliputi inkonsistensi notasi, pelabelan bagian, dan salah ketik. Bagian ini memaparkan beberapa contoh kesalahan yang dianggap paling berdampak terhadap pemahaman konsep, diikuti ringkasan kesalahan lain yang bersifat lebih teknis.

(1) Syarat gradien non-nol pada vektor normal permukaan level

Halaman	Kutipan Dalam Buku
139 (CLP-3 *Multivariable Calculus*, Section 2.5.2 "Tangent Planes and Normal Lines", Warning 2.5.9).	"The vector $\nabla G(x_0, y_0, z_0)$ is a normal vector to $G(x, y, z) = K$ at (x_0, y_0, z_0) (provided $G(x_0, y_0, z_0) = K$)."



a *The vector*

$$-f_x(x_0,y_0)\,\hat{\imath} - f_y(x_0,y_0)\,\hat{\jmath} + \hat{\mathbf{k}}$$

is normal to the surface $z = f(x,y)$ *at* $(x_0\,,\, y_0\,,\, f(x_0,y_0))$.

b *The equation of the tangent plane to the surface* $z = f(x,y)$ *at the point* $(x_0\,,\, y_0\,,\, f(x_0,y_0))$ *may be written as*

$$z = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)\,(x - x_0) + f_y(x_0,y_0)\,(y - y_0)$$

c *The parametric equation of the normal line to the surface* $z = f(x,y)$ *at the point* $(x_0\,,\, y_0\,,\, f(x_0,y_0))$ *is*

$$\langle x, y, z\rangle = \langle x_0, y_0, f(x_0,y_0)\rangle + t\,\langle -f_x(x_0,y_0)\,,\, -f_y(x_0,y_0)\,,\, 1\rangle$$

or, writing it component by component,

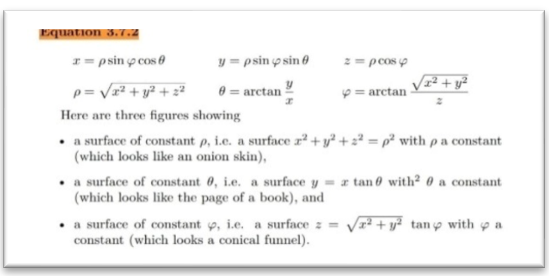
$$x = x_0 - t\,f_x(x_0,y_0) \qquad y = y_0 - t\,f_y(x_0,y_0) \qquad z = f(x_0,y_0) + t$$

Gambar 1. Cuplikan Kesalahan Syarat gradien non-nol yang tidak dicantumkan pada pernyataan vektor normal pada CLP-3 *Multivariable Calculus* (hal. 139)

Pernyataan pada *Warning* 2.5.9 yang menyebut bahwa $\nabla G(x_0, y_0, z_0)$ merupakan vektor normal permukaan level $G(x, y, z) = K$ hanya karena (x_0, y_0, z_0) berada pada permukaan tersebut belum lengkap, karena secara teoritis syarat penting $\nabla G(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ tidak disebutkan. Jika gradien di titik itu nol, titik tersebut adalah titik singular sehingga gradien tidak dapat berperan sebagai vektor normal dan keberadaan bidang singgung tidak lagi terjamin dengan baik; padahal buku ini menjadikan ide "gradien sebagai vektor normal level surface" sebagai dasar untuk banyak contoh dan aplikasi (tangent plane, normal line, hingga optimasi dengan kendala). Secara konsep, pernyataannya seharusnya diperjelas menjadi kurang lebih: "$\nabla G(x_0, y_0, z_0)$ adalah vektor normal terhadap permukaan $G(x, y, z) = K\ di\ (x_0, y_0, z_0)$ jika $G(x_0, y_0, z_0) = K$ dan $\nabla G(x_0, y_0, z_0)$ tidak nol", sejalan dengan definisi permukaan halus bahwa level surface $G(x, y, z) = K$ dikatakan halus di suatu titik jika G terdiferensialkan dan gradiennya tidak nol di titik tersebut. Di titik-titik halus inilah $\nabla G(x_0, y_0, z_0)$ tegak lurus semua vektor tangent dan dapat dipakai untuk menyusun persamaan bidang singgung. Dasar teoretis perbaikan ini, misalnya, dapat ditemukan pada catatan kuliah East Tennessee State University tentang *Level Surfaces*, yang menegaskan bahwa permukaan level $U(x, y, z) = k$ halus bila ∇U kontinu dan non-zero pada permukaan, dan bahwa $\nabla U(p,q,r)$ merupakan vektor normal terhadap tangent plane di titik tersebut (lihat: DISINI).

(2) Rumus permukaan "φ konstan" pada koordinat bola

Halaman	Kutipan Dalam Buku
358, *CLP-3 Multivariable Calculus* (Feldman, Rechnitzer, & Yeager).	Pada bagian penjelasan setelah *Equation 3.7.2*, buku menyatakan secara garis besar bahwa permukaan dengan φ tetap (konstan) dapat ditulis sebagai $z = \sqrt{x^2+y^2}\ \tan\varphi$ untuk suatu nilai tetap φ, sebagai deskripsi kerucut dalam koordinat Kartesius.



Equation 3.7.2

$$x = \rho\sin\varphi\cos\theta \qquad y = \rho\sin\varphi\sin\theta \qquad z = \rho\cos\varphi$$

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \qquad \theta = \arctan\frac{y}{x} \qquad \varphi = \arctan\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$$

Here are three figures showing

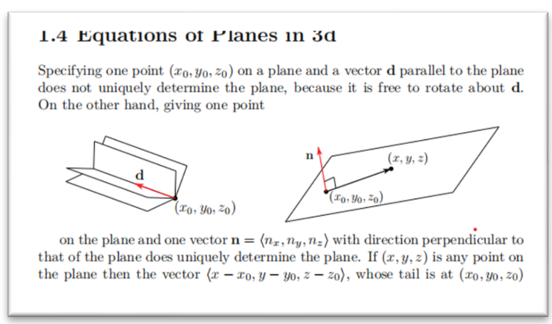
- a surface of constant ρ, i.e. a surface $x^2+y^2+z^2=\rho^2$ with ρ a constant (which looks like an onion skin),
- a surface of constant θ, i.e. a surface $y = x\tan\theta$ with[2] θ a constant (which looks like the page of a book), and
- a surface of constant φ, i.e. a surface $z = \sqrt{x^2+y^2}\ \tan\varphi$ with φ a constant (which looks a conical funnel).

Gambar 2. Cuplikan Kesalahan Kekeliruan fungsi trigonometri pada permukaan "φ konstan" dalam koordinat bola pada CLP-3 *Multivariable Calculus* (hal. 358)

Dari persamaan koordinat bola yang digunakan dalam buku, yaitu $x = \rho\sin\varphi\cos\theta$, $y = \rho\sin\varphi\sin\theta$, dan $z = \rho\cos\varphi$, berlaku $\sqrt{x^2+y^2} = r = \rho\sin\varphi$ dan $z = \rho\cos\varphi$, sehingga untuk $\varphi = \varphi_0$ konstan diperoleh $\tan\varphi_0 = \frac{r}{z}$ dan karenanya $z = r\cot\varphi_0\ \sqrt{x^2+y^2}\cot\varphi_0$ dengan demikian, permukaan "φ konstan" seharusnya ditulis sebagai $z = \sqrt{x^2+y^2}\cot\varphi$, bukan $z = \sqrt{x^2+y^2}\ \tan\varphi$. Kekeliruan fungsi trigonometri ini penting dibahas karena bagian pengantar koordinat bola (Section 3.7) menjadi fondasi pemahaman bentuk permukaan ρ, θ, dan φ konstan serta sangat memengaruhi cara mahasiswa menggambar kerucut dan menentukan batas integral tiga lipat dalam aplikasi (misalnya volume kerucut atau "ice cream cone"); jika hubungan yang digunakan salah, gambaran kerucut dalam koordinat Kartesius dan batas φ pada integral bola juga akan salah. Secara konseptual, perbaikan yang benar adalah mengganti semua kemunculan $z = \sqrt{x^2+y^2}\ \tan\varphi$ pada butir yang dimaksud menjadi $z = \sqrt{x^2+y^2}\cot\varphi$, konsisten dengan penurunan dari definisi koordinat bola dan dengan referensi seperti Strang & Herman (2016), *Calculus: Volume 3* (Bab 5.5), yang juga menunjukkan bahwa permukaan φkonstan membentuk kerucut dengan persamaan $z = r\cot\varphi$.

(3) Penggunaan istilah "line" pada konteks bidang (plane)

Halaman	Kutipan Dalam Buku
43 (Subbab 1.4 *Equations of Planes in 3d*)	Tepat di bawah gambar pada awal Subbab 1.4, tertulis kalimat (dalam bahasa Inggris): "(x, y, z) is any point on the line …"



1.4 Equations of Planes in 3d

Specifying one point (x_0,y_0,z_0) on a plane and a vector $\mathbf{d}$ parallel to the plane does not uniquely determine the plane, because it is free to rotate about $\mathbf{d}$. On the other hand, giving one point

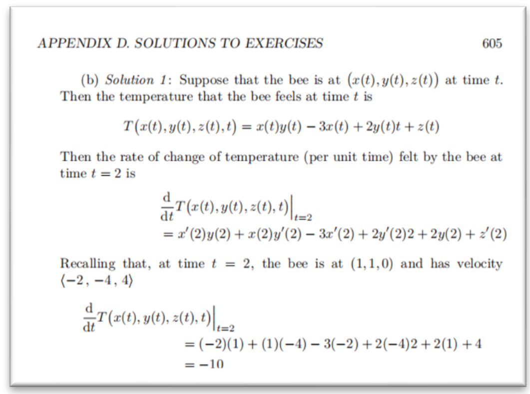
on the plane and one vector $\mathbf{n} = \langle n_x,n_y,n_z\rangle$ with direction perpendicular to that of the plane does uniquely determine the plane. If (x,y,z) is any point on the plane then the vector $\langle x-x_0, y-y_0, z-z_0\rangle$, whose tail is at (x_0,y_0,z_0)

Gambar 3. Cuplikan Kesalahan Kekeliruan Istilah *"Line"* pada Penjelasan Bidang di ℝ³ pada CLP-3 *Multivariable Calculus* (hal. 43)

Kesalahan pada bagian persamaan bidang muncul ketika buku sedang menurunkan bentuk umum bidang di $\mathbb{R}^3$, yaitu $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ dengan (x_0, y_0, z_0) satu titik pada bidang dan $\langle A, B, C \rangle$ vektor normal, tetapi kalimat penjelas menyebut (x, y, z) sebagai "any point on the line", padahal himpunan semua (x, y, z) yang memenuhi persamaan tersebut secara geometris adalah suatu bidang (plane) dua dimensi, bukan garis (line) satu dimensi. Kekeliruan terminologi ini penting dibahas karena bagian awal bab vektor dan geometri ruang berfungsi membangun intuisi dasar mahasiswa tentang perbedaan garis dan bidang; jika bentuk $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ dikaitkan dengan "line", mahasiswa dapat salah mengira bahwa persamaan semacam itu mungkin hanya mewakili garis, sehingga bingung ketika mempelajari jarak titik ke bidang, sudut antarbidang, atau bidang singgung permukaan. Perbaikan yang tepat adalah mengganti frasa tersebut menjadi "(x, y, z) is any point on the plane …" dan menjelaskan bahwa (x_0, y_0, z_0)adalah titik pada bidang, $n = \langle A, B, C \rangle \neq 0$ adalah vektor normal, sedangkan (x, y, z) adalah sebarang titik lain pada bidang yang sama, sehingga $n \cdot \langle x - x_0, y - y_0, z - z_0 \rangle = 0$benar-benar mendeskripsikan sebuah bidang di $\mathbb{R}^3$. Penegasan bahwa bentuk ini adalah persamaan bidang, bukan garis, selaras dengan penjelasan Strang dan Herman dalam *Calculus: Volume 3* (OpenStax), yang menyatakan bahwa himpunan semua (x, y, z) yang memenuhi $n \cdot \langle x - x_0, y - y_0, z - z_0 \rangle = 0$ dengan $n \neq 0$adalah sebuah plane di ruang tiga dimensi, berbeda secara jelas dari line yang biasanya dinyatakan dalam bentuk parametrik (lihat versi daring DISINI).

(4) Laju perubahan "per unit distance" versus "per unit time"

Halaman	Kutipan Dalam Buku
605, problem Book CLP-3 *Multivariable Calculus*, Bab 2. 9, Soal 32(c).	"… find the rate of change of T along the path at $t = t_0$ per unit distance."


APPENDIX D. SOLUTIONS TO EXERCISES 605

(b) *Solution 1*: Suppose that the bee is at $(x(t), y(t), z(t))$ at time t. Then the temperature that the bee feels at time t is

$$T(x(t), y(t), z(t), t) = x(t)y(t) - 3x(t) + 2y(t)t + z(t)$$

Then the rate of change of temperature (per unit time) felt by the bee at time $t = 2$ is

$$\frac{d}{dt}T(x(t), y(t), z(t), t)\Big|_{t=2} = x'(2)y(2) + x(2)y'(2) - 3x'(2) + 2y'(2)2 + 2y(2) + z'(2)$$

Recalling that, at time $t = 2$, the bee is at $(1, 1, 0)$ and has velocity $\langle -2, -4, 4 \rangle$

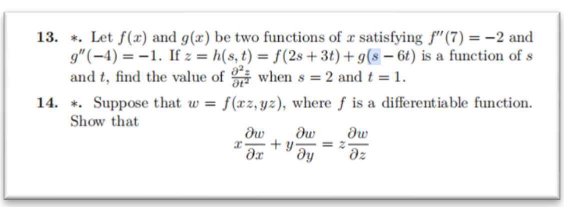
$$\frac{d}{dt}T(x(t), y(t), z(t), t)\Big|_{t=2} = (-2)(1) + (1)(-4) - 3(-2) + 2(-4)2 + 2(1) + 4 = -10$$

Gambar 4. Cuplikan Kesalahan Kekeliruan satuan laju perubahan (per waktu vs per jarak) pada soal aplikasi gradien pada CLP-3 *Multivariable Calculus* (hal. 605)

Dalam salah satu soal aplikasi gradien, redaksi menyatakan bahwa yang diminta adalah "rate of change … per unit distance", padahal lintasan sudah diparameterkan oleh $t$sebagai waktu dan solusi resmi sebenarnya menghitung $\frac{dT}{dt} = \nabla T(x(t), y(t)) \cdot r'(t)$, yaitu laju perubahan suhu terhadap waktu (satuan "derajat per detik"), bukan terhadap jarak. Secara konsep, laju perubahan per satuan waktu $\frac{dT}{dt}$ berbeda dari laju perubahan per satuan jarak $\frac{dT}{ds} = \nabla T \cdot \mathbf{T}$ (turunan arah sepanjang vektor tangen satuan $\mathbf{T} = \frac{r'(t)}{\|r'(t)\|}$), dan keduanya hanya terkait oleh $\frac{dT}{dt} = \frac{dT}{ds}\frac{ds}{dt} = (\nabla T \cdot \mathbf{T}) \| r'(t) \|$. Jika frasa "per unit distance" digunakan untuk situasi di mana yang relevan adalah $\frac{dT}{dt}$, mahasiswa dapat tertukar antara turunan arah dan turunan terhadap waktu, sehingga salah memilih rumus dan salah menafsirkan gradien sebagai laju perubahan maksimum per satuan jarak. Perbaikan yang lebih tepat adalah mengubah redaksi soal agar secara eksplisit meminta “rate of change of T with respect to time along the path at $t = t_0$” (per unit time), sementara jika memang hendak membahas laju perubahan per satuan jarak, bentuk yang digunakan haruslah $\frac{dT}{ds}$ atau turunan arah $\nabla T \cdot \mathbf{u}$ dengan $\mathbf{u}$ vektor satuan. Pembedaan ini selaras dengan penjelasan Boelkins, Austin, dan Schlicker dalam *Active Calculus – Multivariable* (Section 2.5: Directional Derivatives and the Gradient), yang secara eksplisit membedakan laju perubahan “per unit of time” dan “per unit of distance in a given direction” (lihat misalnya versi daring DISINI).

(5) Kesalahan penerapan aturan rantai pada fungsi komposisi

Halaman	Kutipan Dalam Buku
133, *CLP-3 Multivariable Calculus Problem Book*, Section 2.4, solusi S–13 (baris kedua perhitungan turunan pertama).	Pada baris kedua perhitungan turunan pertama di solusi S–13 tertulis ekspresi “$g(s - 6t)$”


13. $*$. Let $f(x)$ and $g(x)$ be two functions of x satisfying $f''(7) = -2$ and $g''(-4) = -1$. If $z = h(s,t) = f(2s+3t) + g(s-6t)$ is a function of s and t, find the value of $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$ when $s = 2$ and $t = 1$.

14. $*$. Suppose that $w = f(xz, yz)$, where f is a differentiable function. Show that

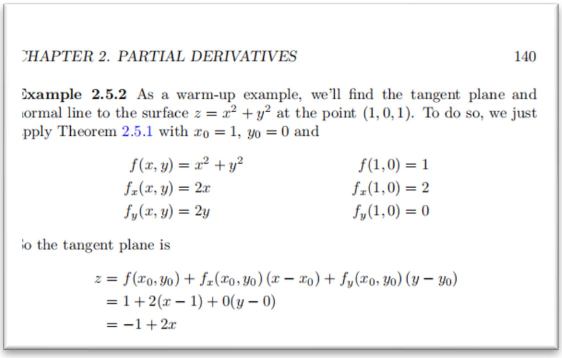
$$x\frac{\partial w}{\partial x} + y\frac{\partial w}{\partial y} = z\frac{\partial w}{\partial z}$$

Gambar 5. Cuplikan Kesalahan Kekeliruan satuan laju perubahan (per waktu vs per jarak) pada soal aplikasi gradien pada CLP-3 *Multivariable Calculus* (hal. 133)

Kesalahan pada solusi yang melibatkan ekspresi $g(s - 6t)$ terjadi ketika turunan fungsi komposisi ditulis masih dalam bentuk $g(s - 6t)$ tanpa tanda prime, padahal secara konsep, jika $g$adalah fungsi satu variabel dan kita menurunkan $g(s - 6t)$ terhadap t, aturan rantai mengharuskan munculnya turunan fungsi luar, yaitu $g'(s - 6t)$, dikalikan dengan turunan argumennya -6, sehingga bentuk yang benar adalah $\frac{d}{dt}[g(s - 6t)] = g'(s - 6t) \cdot (-6)$; menuliskan kembali $g(s - 6t)$di posisi ini berarti fungsi yang seharusnya sudah diturunkan tetap diperlakukan sebagai fungsi asalnya dan secara langsung melanggar chain rule. Kekeliruan ini serius karena muncul dalam contoh solusi yang seharusnya menjadi model penerapan aturan rantai: jika mahasiswa menirunya secara mekanis, mereka bisa menganggap fungsi komposisi boleh “diturunkan” tanpa mengubah notasi fungsi luarnya, sehingga kabur perbedaan antara g dan g' baik dalam kalkulus satu variabel maupun multivariable. Perbaikan yang tepat adalah mengganti semua kemunculan $g(s - 6t)$ yang dimaksud sebagai “turunan fungsi luar” dengan $g'(s - 6t)$ di baris perhitungan turunan, sehingga solusi konsisten dengan bentuk umum chain rule $\frac{dy}{dt} = g'(u)\,\frac{du}{dt}$ untuk komposisi $y = g(u)$ dengan $u = u(t)$, sebagaimana dijelaskan, misalnya, dalam Stewart (2016), *Calculus: Early Transcendentals* (bagian *Chain Rule* dan *Multivariable Chain Rule*), maupun dalam catatan *Calculus III – Chain Rule* oleh Paul Dawkins yang dapat diakses

(6) Ketidakkonsistenan notasi titik pada bidang singgung

Halaman	Kutipan Dalam Buku
140, Bab 2, Subbab 2.5.1 *“Tangent Planes to Graphs”* Buku: *CLP-3 Multivariable Calculus* (Feldman, Rechnitzer, & Yeager)	“… the tangent plane at the point $(a, b, f(a, b))$.”



HAPTER 2. PARTIAL DERIVATIVES 140

xample **2.5.2** As a warm-up example, we'll find the tangent plane and ormal line to the surface $z = x^2 + y^2$ at the point $(1, 0, 1)$. To do so, we just pply Theorem 2.5.1 with $x_0 = 1$, $y_0 = 0$ and

$$f(x,y) = x^2 + y^2 \qquad f(1,0) = 1$$
$$f_x(x,y) = 2x \qquad f_x(1,0) = 2$$
$$f_y(x,y) = 2y \qquad f_y(1,0) = 0$$

o the tangent plane is

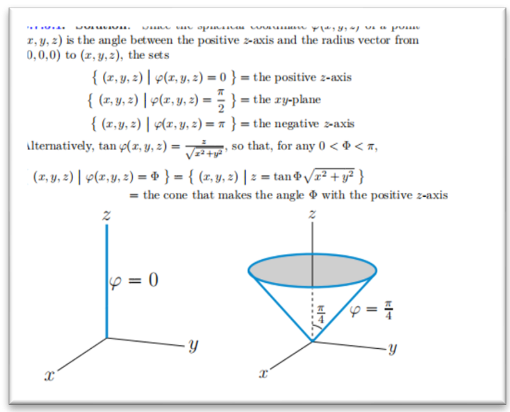
$$\begin{aligned} z &= f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)\,(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)\,(y - y_0) \\ &= 1 + 2(x-1) + 0(y-0) \\ &= -1 + 2x \end{aligned}$$

Gambar 6. Cuplikan Kesalahan Ketidakkonsistenan Notasi Titik pada Teorema Bidang Singgung pada CLP-3 *Multivariable Calculus* (hal. 140)

Dalam subbab 2.5.1, penulis mula-mula menggunakan notasi titik tetap pada permukaan sebagai $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, namun pada kalimat terakhir halaman 130 notasi ini tiba-tiba diganti menjadi $(a, b, f(a, b))$ tanpa penjelasan, sehingga menimbulkan ketidakkonsistenan notasi antara titik tetap (x_0, y_0) dan variabel bebas (x, y) dalam persamaan bidang singgung. Secara matematis, hal ini bukan kesalahan konsep, tetapi secara pedagogis dapat membingungkan mahasiswa pemula: mereka bisa mengira bahwa (a, b) adalah variabel baru atau menyamakannya dengan (x, y), sehingga rumus bidang singgung disalahpahami sebagai "rumus umum" tanpa membedakan titik pusat aproksimasi (x_0, y_0) dengan titik (x, y) yang bergerak di bidang. Perbaikannya adalah menjaga konsistensi notasi, misalnya dengan menulis "…the tangent plane at the point $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$" sehingga selaras dengan rumus standar $z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$, di mana (x_0, y_0) adalah titik tetap pada permukaan dan (x, y) variabel di bidang. Praktik ini sejalan dengan penjelasan Harvey Mudd College dalam *Tangent Planes – Calculus Tutorials*, yang secara konsisten menggunakan (x_0, y_0, z_0) sebagai titik tetap ketika menuliskan persamaan bidang singgung permukaan $z = f(x, y)$ (lihat: DISINI).

(7) Kesalahan Rumus Hubungan $\tan \varphi$pada Definisi Sudut $\varphi(x, y, z)$

Halaman	**Kutipan Dalam Buku**
773 (Appendix D, Solutions to Exercises 3.7.5.1)	Alternatively, $\tan\ \varphi(x, y, z) = \frac{\sqrt{z}}{x^2+y^2}\ldots$"



x, y, z) is the angle between the positive z-axis and the radius vector from 0, 0, 0) to (x, y, z), the sets

$$\{\ (x,y,z)\ |\ \varphi(x,y,z) = 0\ \} = \text{the positive } z\text{-axis}$$
$$\{\ (x,y,z)\ |\ \varphi(x,y,z) = \frac{\pi}{2}\ \} = \text{the } xy\text{-plane}$$
$$\{\ (x,y,z)\ |\ \varphi(x,y,z) = \pi\ \} = \text{the negative } z\text{-axis}$$

lternatively, $\tan\varphi(x,y,z) = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$, so that, for any $0 < \Phi < \pi$,

$$\begin{aligned} (x,y,z)\ |\ \varphi(x,y,z) = \Phi\ \} &= \{\ (x,y,z)\ |\ z = \tan\Phi\sqrt{x^2+y^2}\ \} \\ &= \text{the cone that makes the angle } \Phi \text{ with the positive } z\text{-axis} \end{aligned}$$

Gambar 7. Cuplikan Kesalahan Kekurangan Syarat Gradien Non-Nol dalam Pernyataan Vektor Normal Permukaan Level pada CLP-3 *Multivariable Calculus* (hal. 773)

Pada koordinat bola dengan konvensi $x = \rho \sin\,\varphi \cos\,\theta$, $y = \rho \sin\,\varphi \sin\,\theta$, dan $z = \rho \cos\,\varphi$, hubungan yang benar antara sudut φ dan koordinat Kartesius adalah $\tan\,\varphi = \sqrt{x^2 + y^2}/z$, bukan $\sqrt{z}/(x^2 + y^2)$; bentuk yang terakhir tidak konsisten secara dimensi (pembilang dan penyebut tidak menghasilkan bilangan tak berdimensi) dan tidak dapat diturunkan dari relasi dasar $\sqrt{x^2 + y^2} = \rho \sin\,\varphi$ dan $z = \rho\cos\,\varphi$. Kesalahan ini penting karena rumus yang menghubungkan φdengan (x, y, z)merupakan pintu masuk utama untuk memahami geometri koordinat bola, khususnya fakta bahwa permukaan dengan φtetap adalah kerucut dengan persamaan $z = \cot\,\Phi\,\sqrt{x^2 + y^2}$; jika mahasiswa menghafal bentuk yang salah, mereka berisiko keliru menuliskan permukaan kerucut, batas daerah integrasi, dan konversi integral tiga lipat dari Kartesius ke koordinat bola. Perbaikan yang tepat adalah menurunkan kembali dari definisi bahwa $\sqrt{x^2+y^2} = \rho \sin\varphi$ dan $z = \rho\cos\varphi$, sehingga diperoleh $\tan\varphi = \sqrt{x^2+y^2}/z$dan, untuk $\varphi = \Phi$ konstan, permukaan kerucut yang benar direpresentasikan oleh $z = \cot\Phi\sqrt{x^2+y^2}$. Rumus ini konsisten dengan pembahasan standar tentang koordinat bola, misalnya dalam *Calculus III – Spherical Coordinates* pada Paul's Online Math Notes (Lamar University), yang dapat diakses melalui DISINI.

B. Kesalahan Teknis

Selain tujuh kesalahan utama yang menyentuh aspek konseptual dan rumus, analisis juga menemukan beberapa kesalahan lain yang bersifat lebih teknis dan editorial. Kesalahan-kesalahan ini mencakup, antara lain, ketidaktepatan pelabelan bagian pada solusi (misalnya bagian (c) yang tertulis kembali sebagai (b)), penamaan titik yang tertukar dalam diagram atau uraian (seperti P_A yang seharusnya P_B), salah eja pada istilah matematika kunci (misalnya *maximized* yang tertulis *mazimized*), serta tampilan simbol persen yang masih memuat sintaks LaTeX (seperti "0.5%" alih-alih "0.5%"). Secara matematis, empat kesalahan ini tidak mengubah struktur konsep ataupun hasil perhitungan, sehingga tidak dapat dikategorikan sebagai kesalahan substantif seperti tujuh kesalahan utama sebelumnya. Namun demikian, dari sudut pandang pedagogis dan editorial, keberadaannya tetap penting dicatat: ketidakkonsistenan label dan notasi dapat menyulitkan mahasiswa ketika mencoba mencocokkan soal dengan solusi, sementara salah eja dan tampilan simbol yang "mentah" mengurangi kejelasan presentasi serta keteladanan buku sebagai model penulisan matematika yang rapi. Oleh karena itu, meskipun tidak dibahas satu per satu secara rinci dalam artikel ini, empat kesalahan teknis tersebut direkomendasikan untuk dikoreksi pada edisi berikutnya.

Posisi CLP-3 Dibandingkan dengan Literatur Kalkulus Multivariabel Lain

Jika dibandingkan dengan buku kalkulus multivariabel komersial yang banyak dipakai secara internasional (misalnya Stewart, Thomas, atau Larson), CLP-3 menempati posisi yang agak berbeda. Secara umum, CLP-3 lebih eksplisit menekankan hubungan antara geometri dan analisis (misalnya melalui visualisasi permukaan, kurva level, dan interpretasi vektor) serta memberi porsi yang relatif lebih besar pada penalaran konseptual dibanding sekadar teknik komputasi rutin. Hal ini tampak, misalnya, pada penjelasan limit multivariabel yang menonjolkan kesetiaan limit terhadap semua arah pendekatan dan pada pembahasan gradien sebagai objek geometris, bukan hanya sekumpulan rumus turunan parsial.

Dibandingkan dengan buku teks open-access lain seperti *Calculus: Volume 3* (Strang & Herman) atau *Active Calculus – Multivariable* (Boelkins dkk.), CLP-3 cenderung berada di antara dua kutub: lebih teoritis daripada teks yang sangat berorientasi aplikasi dan aktivitas kelas, namun tetap tidak sedalam buku kalkulus yang benar-benar proof-based murni. CLP-3, misalnya, menyisipkan pembahasan opsional tentang kasus ketika turunan parsial campuran tidak saling bertukar atau fungsi memiliki semua turunan parsial tetapi tidak kontinu, yang jarang muncul dalam buku yang berfokus pada pemodelan dan pemecahan masalah terapan.

Keunggulan khas CLP-3 adalah statusnya sebagai buku ajar berlisensi Creative Commons yang terus diperbarui sebagai *living document* dan tersedia secara bebas melalui proyek CLP di University of British Columbia. Hal ini kontras dengan banyak buku komersial yang bersifat tertutup dan berbayar. Di satu sisi, sifat terbuka ini menjadikan CLP-3 sangat menarik untuk konteks pendidikan tinggi di negara berkembang karena mengurangi hambatan akses; di sisi lain, status "testing and changes" membuatnya kurang stabil dibanding buku teks klasik yang telah melalui proses editorial panjang.

Dalam konteks pembelajaran kalkulus multivariabel di Indonesia, CLP-3 dapat dipandang sebagai pelengkap, bukan pengganti, literatur yang sudah mapan. Ia menawarkan jembatan antara teks komputasional populer dan literatur yang sangat teoritis: cukup kaya contoh dan latihan untuk mendukung keterampilan prosedural, tetapi juga cukup reflektif untuk melatih cara berpikir matematis yang lebih kritis. Dengan demikian, dibandingkan dengan sastra lain, posisi CLP-3 relatif unik sebagai buku kalkulus multivariabel open-access yang berusaha menyeimbangkan kejelasan pedagogis, ketelitian matematis, dan fleksibilitas penggunaan di berbagai konteks kurikulum.

Implikasi bagi Pembelajaran Kalkulus Multivariabel

Temuan mengenai kekuatan, kelemahan, dan kesalahan dalam *CLP-3 Multivariable Calculus* membawa beberapa implikasi langsung bagi praktik pembelajaran Kalkulus Multivariabel. Pertama, dari sisi pemilihan buku ajar, CLP-3 layak diposisikan sebagai teks utama untuk kelas yang menekankan pemahaman konseptual dan hubungan antara geometri dan analisis, bukan sekadar keterampilan komputasi. Visualisasi yang kaya, struktur materi yang runtut, dan latihan yang bertingkat dapat dimanfaatkan dosen untuk mendukung diskusi di kelas, tugas terstruktur, maupun belajar mandiri mahasiswa.

Kedua, status buku sebagai *living document* dan adanya berbagai kesalahan yang teridentifikasi menunjukkan bahwa teks ini tidak boleh digunakan secara "pasif". Dosen perlu secara sadar mengintegrasikan penggunaan CLP-3 dengan daftar errata dan rujukan pembanding, serta menandai bagian-bagian yang berpotensi menimbulkan miskonsepsi (misalnya terkait gradien sebagai vektor normal, koordinat bola, dan syarat teorema tertentu). Pendekatan ini tidak hanya mencegah kesalahan konseptual berlanjut ke topik lain, tetapi juga memberi contoh konkret kepada mahasiswa bahwa teks matematika pun dapat dan perlu dikritisi.

Ketiga, dari sisi desain pembelajaran, analisis ini mengisyaratkan pentingnya mengembangkan bahan pendamping (handout, lembar klarifikasi, atau catatan kuliah) yang menyesuaikan CLP-3 dengan konteks lokal mahasiswa, termasuk bahasa, contoh aplikasi, dan prasyarat materi. Dosen dapat, misalnya, menggunakan CLP-3 sebagai sumber utama bacaan, tetapi menyusun ringkasan teorema dan contoh tambahan yang memperjelas bagian opsional atau meluruskan notasi yang kurang konsisten.

Keempat, temuan kesalahan dan cara menanganinya membuka peluang untuk menjadikan analisis teks sebagai bagian dari strategi pembelajaran. Mahasiswa dapat diajak secara terarah mengidentifikasi dan mendiskusikan ketidaktepatan kecil dalam buku sebagai latihan berpikir kritis, bukan sekadar mengerjakan soal. Dengan demikian, CLP-3 tidak hanya berfungsi sebagai sumber materi, tetapi juga sebagai sarana melatih literasi matematis dan sikap ilmiah dalam berhadapan dengan sumber tertulis.

KESIMPULAN

Analisis terhadap *CLP-3 Multivariable Calculus* menunjukkan bahwa buku ini memiliki kekuatan pedagogis yang signifikan sekaligus sejumlah kelemahan yang perlu diantisipasi. Dari sisi keunggulan, CLP-3 menyajikan struktur materi yang runtutbermula dari vektor dan geometri ruang, berlanjut ke fungsi beberapa variabel dan turunan parsial, hingga integral lipat dan perubahan koordinat dengan penekanan kuat pada hubungan antara geometri dan analisis. Strategi "mendaur ulang" konsep kalkulus satu variabel, penggunaan visualisasi (seperti *level curves*, *quadric surfaces*, dan gambar permukaan), serta ketersediaan latihan yang kaya dengan *hint* dan solusi resmi menjadikan buku ini sangat mendukung pengembangan pemahaman konseptual dan keterampilan komputasi mahasiswa. Sifatnya sebagai *open textbook* berlisensi Creative Commons juga menambah nilai aksesibilitas, terutama di lingkungan dengan keterbatasan sumber daya.

Di sisi lain, kajian ini mengungkap bahwa CLP-3 masih menyimpan berbagai kelemahan. Statusnya sebagai *living document* dan ketergantungan pada seri CLP sebelumnya membuat buku ini kurang sepenuhnya stabil sebagai satu-satunya rujukan mandiri. Secara khusus, teridentifikasi sedikitnya tujuh kesalahan utama yang menyentuh aspek konseptual dan rumus antara lain pada syarat gradien sebagai vektor normal permukaan level, definisi dan interpretasi sudut φ dalam koordinat bola, redaksi laju perubahan "per unit distance", penerapan aturan rantai, serta konsistensi notasi titik pada bidang singgung disertai beberapa kesalahan teknis lain seperti pelabelan, penamaan titik, salah eja, dan tampilan sintaks LaTeX. Walaupun tidak mendominasi keseluruhan isi buku, kesalahan-kesalahan ini berpotensi menimbulkan miskonsepsi, terutama pada topik-topik yang memang konseptualnya peka.

Berdasarkan temuan tersebut, dapat disimpulkan bahwa *CLP-3 Multivariable Calculus* layak dipertimbangkan sebagai buku ajar utama untuk mata kuliah Kalkulus Multivariabel yang berorientasi pada pemahaman konsep dan pembuktian, dengan syarat penggunaannya disertai sikap kritis dan pendampingan aktif dari dosen. Pengajar perlu menginformasikan keberadaan errata, mengklarifikasi bagian-bagian yang berpotensi menyesatkan, serta bila perlu melengkapi CLP-3 dengan sumber lain yang lebih stabil secara editorial. Secara lebih luas, hasil kajian ini menegaskan pentingnya peninjauan kritis terhadap buku teks matematika: mahasiswa tidak hanya perlu dilatih menguasai prosedur dan teorema, tetapi juga diajak mengembangkan literasi dan sikap ilmiah dalam membaca, memeriksa, dan mengevaluasi sumber tertulis yang mereka gunakan.

DAFTAR PUSTAKA

Allolayuk, S., Tjenemundan, D., & Ch Fentar, Y. (2023). Analisis kesulitan belajar mahasiswa dalam menerapkan integral untuk menghitung luas daerah. *Jurnal Pendidikan Tambusai, 7*(2), 4857–4865.

Boelkins, M., Schlicker, S., & Austin, D. (2017). *Active calculus: Multivariable*. Grand Valley State University.

Dawkins, P. (2007). *Calculus III – Chain rule*. Paul's Online Math Notes, Lamar University.

East Tennessee State University. (n.d.). *Level surfaces*. In *Multivariable calculus online notes*.

Feldman, J., Rechnitzer, A., & Yeager, E. (2018). *CLP-3 multivariable calculus problem book*. Department of Mathematics, University of British Columbia.

Feldman, J., Rechnitzer, A., & Yeager, E. (2021). *CLP-3 multivariable calculus* (May 2021 ed.). University of British Columbia.

Feldman, J., Rechnitzer, A., & Yeager, E. (2022). *CLP-3 multivariable calculus*. Department of Mathematics, University of British

Columbia.

Feldman, J., Rechnitzer, A., & Yeager, E. (2024). *CLP-3 multivariable calculus: Exercises* (Early draft). University of British Columbia.

Hadi Dharma, E. A. M., & Narpila, S. D. (2025). Identifikasi kendala mahasiswa dalam memahami integral permukaan: Studi kasus pada mata kuliah Kalkulus Vektor. *Jurnal Intelek dan Cendikiawan Nusantara.*

Harvey Mudd College. (n.d.). *Tangent planes – Calculus tutorials*. In *Multivariable calculus tutorials*.

Higham, N. J. (2020). *Handbook of writing for the mathematical sciences* (3rd ed.). Society for Industrial and Applied Mathematics.

LaTeX Tutorials. (n.d.). *How to write percent (%) symbol in LaTeX?*

Leithold, L. (1971). *The calculus with analytic geometry* (Rev. ed.). Harper & Row.

Muhassanah, N., & Lukman, H. S. (2021). Analisis masalah belajar mahasiswa pada materi integral ditinjau dari perspektif disposisi matematis. *Jurnal Analisa, 7*(2), 185–194.

OpenStax. (2016). *Calculus volume 3* (G. Strang & E. Herman, Authors). OpenStax, Rice University.

Salafiya, T. T., Kamila, F. I., Kimnu, K. P., & Risqiyani, L. (2025). Kesulitan mahasiswa pendidikan matematika Universitas Negeri Semarang dalam memahami konsep kalkulus integral. *Jurnal Angka, 2*(1), 93–108**.**

Spivak, M. (1965). *Calculus on manifolds: A modern approach to classical theorems of advanced calculus*. W. A. Benjamin.

Stewart, J. (2016). *Calculus: Early transcendentals* (8th ed.). Cengage Learning.