

Analisis Pedagogis dan Konseptual atas Kesalahan dalam Modul Kalkulus Peubah Banyak: Implikasi untuk Perbaikan Bahan Ajar

**Immanuel Simbolon¹, Aghniya Rahmi², Nurul Sakinah³, Muhammad Rasyid Mondol⁴,
Suwanto⁵**

**Departement of Mathematics Education, Universitas Negeri Medan,
Jl. Willem Iskandar Pasar V Medan Estate, Medan Indonesia**

Email : immanuelsbln5@gmail.com
, aghniya.rahmi06@gmail.com
nurulsakinahsrg02@gmail.com rasyidmondol1@gmail.com
suwantompd89@gmail.com

Abstrak

Penelitian ini bertujuan menganalisis secara pedagogis dan konseptual kesalahan-kesalahan yang terdapat dalam *Modul Pembelajaran Kalkulus Peubah Banyak* karya Soebagyo dkk. (2021) dan merumuskan rekomendasi perbaikan bahan ajar. Penelitian menggunakan pendekatan kualitatif dengan jenis studi dokumen melalui kerangka *Critical Book Report* (CBR). Sumber data utama adalah modul kalkulus peubah banyak yang digunakan pada perkuliahan, sedangkan data pendukung berupa artikel jurnal nasional berbahasa Indonesia yang relevan dengan topik kalkulus multivariabel, aljabar linear, dan pendidikan matematika. Dari hasil telaah ditemukan sepuluh kesalahan substantif yang dikategorikan ke dalam: (1) kesalahan definisi dan konsep (fungsi dua peubah, gradien, ortogonalitas, trace matriks), (2) kesalahan prosedural dan perhitungan (proyeksi vektor, contoh segitiga siku-siku, luas segitiga dengan *cross product*), serta (3) kelemahan notasi dan presentasi simbolik (komponen hasil kali silang, sifat tidak komutatif perkalian matriks, konsistensi notasi matriks). Setiap temuan diverifikasi dengan membandingkan definisi dan teorema baku pada jurnal acuan, kemudian disusun usulan perbaikan berupa redaksi definisi baru, contoh tandingan, penekanan domain-kodomain, serta penambahan latihan konseptual. Hasil penelitian menunjukkan bahwa sebagian kesalahan berpotensi kuat memunculkan miskonsepsi berantai pada topik lanjut (integral lipat, optimasi multivariabel, transformasi linier) sehingga perlu diberi anotasi korektif jika modul tetap digunakan sebagai referensi kuliah. Secara praktis, studi ini memberi masukan bagi dosen, mahasiswa pendidikan matematika, dan pengembang kurikulum mengenai pentingnya audit konseptual terhadap buku ajar kalkulus sebelum digunakan secara luas. **Kata kunci:** kalkulus peubah banyak, kesalahan konseptual, bahan ajar, pendidikan matematika

Abstract

This study aims to provide a pedagogical and conceptual analysis of errors found in the textbook Modul Pembelajaran Kalkulus Peubah Banyak by Soebagyo et al. (2021) and to formulate recommendations for improving the material. The research adopts a qualitative approach in the form of a document study within a Critical Book Report (CBR) framework. The main data source is the multivariable calculus module used in university courses, supported by ten Indonesian peer-reviewed journal articles related to multivariable calculus, linear algebra, and mathematics education. The review identifies ten substantive errors, grouped into: (1) definitional and conceptual errors (functions of two variables, gradient,

orthogonality, matrix trace), (2) procedural and computational mistakes (vector projection, right-triangle example, triangle area via cross product), and (3) weaknesses in notation and symbolic presentation (cross-product components, non-commutativity of matrix multiplication, inconsistent matrix notation). Each error is verified against standard definitions and theorems presented in the journal references, and revised versions are proposed in the form of refined definitions, counter-examples, explicit emphasis on domain and codomain, and additional concept-oriented exercises. The results indicate that several errors may strongly induce cascading misconceptions in advanced topics (multiple integrals, multivariable optimization, linear transformations), so corrective annotations are necessary if the module continues to be used as a course textbook. Practically, this study provides insights for lecturers, preservice mathematics teachers, and curriculum developers about the importance of conceptual auditing of calculus textbooks before their widespread adoption.

Keywords: *multivariable calculus, conceptual errors, instructional materials, mathematics education*

Pendahuluan

Kalkulus peubah banyak merupakan mata kuliah lanjutan yang wajib ditempuh mahasiswa Pendidikan Matematika dan menjadi prasyarat bagi mata kuliah lain seperti persamaan diferensial dan statistika matematika. Annajmi dan Isharyadi menegaskan bahwa mata kuliah ini menuntut kemampuan berpikir tingkat tinggi karena memuat materi sistem koordinat dan fungsi dua peubah yang bersifat sangat abstrak (Annajmi & Isharyadi, 2019). Temuan serupa dilaporkan Wahyuni yang menunjukkan bahwa kemampuan pemahaman matematis mahasiswa pada mata kuliah Kalkulus Peubah Banyak masih bervariasi dan cenderung belum optimal (Wahyuni et al., 2020).

Sejalan dengan itu, beberapa penelitian mengungkap bahwa mahasiswa kerap melakukan kesalahan ketika menyelesaikan soal-soal kalkulus peubah banyak. Afifah, Nafi'an, dan Putri menemukan berbagai jenis kesalahan, baik konsep, prosedur, maupun penalaran, dalam menyelesaikan soal pada mata kuliah Kalkulus Peubah Banyak di STKIP PGRI Tulungagung (Afifah et al., 2018). Farhan dan Zulkarnain juga melaporkan bahwa mahasiswa masih banyak melakukan kesalahan pada materi sistem koordinat, turunan parsial, dan integral lipat, yang menunjukkan belum kokohnya penguasaan konsep multivariat (Farhan & Zulkarnain, 2019). Hasil-hasil tersebut mengindikasikan bahwa kelemahan pemahaman konsep tidak hanya

berasal dari faktor mahasiswa, tetapi juga dapat berkaitan dengan kualitas sumber belajar yang digunakan selama perkuliahan.

Buku teks dan modul ajar memegang peranan sentral sebagai sumber belajar utama baik bagi dosen maupun mahasiswa. Analisis terhadap buku teks matematika SMA yang dilakukan Arroida menunjukkan bahwa meskipun sebuah buku telah lulus penilaian dan banyak digunakan, tetap ditemukan kekurangan pada aspek materi, bahasa, penyajian, dan kegrafikaan (Arroida, 2018). Penelitian Kurniawati, Rusdiana, dan Basir juga menegaskan bahwa analisis buku teks penting untuk mengetahui tingkat kesesuaian isi buku dengan kurikulum yang berlaku, karena buku merupakan bahan ajar yang paling sering dimanfaatkan di kelas (Kurniawati et al., 2022). Buku teks yang diterbitkan pemerintah sekalipun masih perlu dikaji kesesuaiannya dengan standar BSNP, terutama dari aspek kelayakan isi dan penyajian (Moneta & Susanto, 2020).

Di level perguruan tinggi, kebutuhan akan bahan ajar kalkulus yang berkualitas juga telah disoroti. Annajmi dan Isharyadi melalui studinya tentang analisis kebutuhan pengembangan bahan ajar Kalkulus Peubah Banyak berbantuan GeoGebra menyimpulkan bahwa mahasiswa sangat memerlukan bahan ajar yang disusun dosen sendiri dan disesuaikan dengan kebutuhan mereka, bukan sekadar

mengandalkan buku teks yang beredar di pasaran (Annajmi & Isharyadi, 2019). Penelitian lain tentang pengembangan bahan ajar kalkulus menunjukkan bahwa rancangan modul yang baik dapat membantu mengurangi kesulitan konsep dan meningkatkan keterlibatan mahasiswa dalam pembelajaran (Ilmadi et al., 2020).

Meskipun demikian, sebagian besar penelitian analisis buku teks di Indonesia masih berfokus pada buku matematika sekolah dasar dan menengah. Kajian yang secara spesifik menelaah modul kalkulus peubah banyak yang digunakan di program studi Pendidikan Matematika masih relatif terbatas. Padahal, kesalahan definisi, contoh, maupun notasi dalam modul tingkat perguruan tinggi berpotensi menimbulkan *miskonsepsi berantai* yang kemudian dibawa mahasiswa ketika mereka menjadi guru di sekolah. Dengan kata lain, kualitas modul kalkulus di LPTK akan berkontribusi langsung terhadap kualitas pembelajaran matematika di jenjang berikutnya.

Sejalan dengan berbagai penelitian tersebut, analisis terhadap buku dan modul kalkulus peubah banyak menjadi penting untuk memastikan bahwa materi yang disajikan benar, konsisten, dan mendukung proses belajar. Penelitian ini dilakukan dalam bentuk Critical Book Report (CBR) terhadap *Modul Pembelajaran Kalkulus Peubah Banyak* karya Soebagyo dkk., dengan tujuan mengidentifikasi kesalahan penyajian materi yang berpotensi menimbulkan miskonsepsi, terutama pada mahasiswa yang baru mempelajari kalkulus multivariabel. Dengan mengetahui bentuk-bentuk kesalahan yang muncul dan memverifikasinya menggunakan artikel jurnal berbahasa Indonesia yang telah terbit dan bereputasi, hasil penelitian ini diharapkan menjadi dasar perbaikan buku ajar serta bahan pertimbangan bagi dosen dalam merancang strategi pengajaran kalkulus peubah banyak di perkuliahan.

Metode Penelitian

Penelitian ini menggunakan pendekatan kualitatif deskriptif dengan bentuk Critical Book Report (CBR). Pendekatan ini dipilih karena tujuan penelitian bukan untuk menguji perlakuan terhadap subjek, tetapi untuk mengulas secara

kritis isi suatu modul kalkulus peubah banyak. Melalui CBR, modul dianalisis secara sistematis untuk mengidentifikasi kesalahan konsep, prosedur, dan notasi, kemudian disusun deskripsi serta rekomendasi perbaikannya. Hasil analisis disajikan dalam bentuk uraian naratif yang menggambarkan bagaimana kesalahan muncul, apa dampaknya secara matematis maupun pedagogis, dan bagaimana seharusnya bagian tersebut diperbaiki.

Sumber Data

Sumber data utama dalam penelitian ini adalah buku “Modul Pembelajaran Kalkulus Peubah Banyak” yang digunakan sebagai bahan ajar pada mata kuliah Kalkulus Peubah Banyak di program studi Pendidikan Matematika (Soebagyo et al., 2021). Modul ini memuat materi vektor dan geometri ruang, determinan dan bidang, fungsi dua peubah, turunan parsial, gradien, serta topik-topik terkait lain yang menjadi fokus kajian. Sumber data pendukung berupa artikel jurnal nasional berbahasa Indonesia yang telah terbit (memiliki volume dan nomor) dan membahas topik yang sepadan dengan isi modul, seperti kalkulus multivariabel, vektor, matriks, dan pendidikan matematika. Artikel-artikel tersebut digunakan sebagai rujukan untuk memverifikasi kebenaran definisi, rumus, maupun penjelasan yang terdapat dalam modul.

Teknik Pengumpulan Data

Data dikumpulkan melalui studi dokumentasi. Peneliti terlebih dahulu membaca modul secara menyeluruh untuk memperoleh gambaran umum isi dan alur penyajian materi. Selanjutnya, dilakukan pembacaan kritis pada setiap bab untuk menandai bagian-bagian yang diduga bermasalah, misalnya definisi yang tidak lengkap, contoh hitungan yang tidak konsisten, penggunaan simbol yang rancu, atau penjelasan yang berpotensi menimbulkan miskonsepsi. Bagian-bagian yang telah ditandai kemudian dicatat dalam lembar kerja dengan mencantumkan nomor kesalahan, bab atau subbab, nomor halaman, serta cuplikan teks yang relevan. Pada tahap berikutnya, peneliti menelusuri artikel-artikel jurnal yang sesuai dengan tema kesalahan yang ditemukan, sehingga setiap kesalahan memiliki satu rujukan utama untuk proses verifikasi.

Teknik Analisis Data

Analisis data dilakukan melalui beberapa tahap. Pertama, semua dugaan kesalahan yang telah dicatat ditelaah ulang untuk memastikan bahwa bagian tersebut benar-benar mengandung ketidaktepatan, bukan sekadar perbedaan gaya penulisan. Kesalahan-kesalahan tersebut kemudian diklasifikasikan ke dalam kategori kesalahan definisi atau konsep, kesalahan prosedural atau perhitungan, kesalahan notasi, dan kelemahan penjelasan pedagogis. Kedua, dilakukan analisis isi secara matematis dan pedagogis terhadap setiap kesalahan, yaitu menjelaskan di mana letak kekeliruannya, apa implikasinya terhadap pemahaman mahasiswa, dan konsep benar seperti apa yang seharusnya muncul. Ketiga, hasil analisis dibandingkan dengan isi artikel jurnal pendukung yang relevan untuk memverifikasi bahwa bagian modul tersebut memang menyimpang dari konsep yang baku. Keempat, berdasarkan hasil verifikasi, disusun rekomendasi perbaikan dalam format yang konsisten, meliputi judul kesalahan, letak kesalahan, uraian masalah, analisis, usulan perbaikan, dan keterangan jurnal verifikasi. Rangkaian hasil analisis ini kemudian dirangkum dalam bagian hasil dan pembahasan sebagai sepuluh kesalahan utama beserta implikasi dan saran perbaikannya.

Hasil Dan Pembahasan

Hasil Penelitian

Berdasarkan kajian yang dilakukan terhadap buku Kalkulus Peubah Banyak yang digunakan sebagai objek penelitian, ditemukan beberapa kesalahan/miskonsepsi, yaitu:

Kesalahan 1: Contoh Segitiga Siku-siku dengan Dot Product yang Tidak Konsisten

Vektor tiga dimensi

Produk titik dalam 3D serupa seperti pada 2D. Jika $A = (a_1, a_2, a_3)$ dan $B = (b_1, b_2, b_3)$ maka:

$$A \cdot B = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

Tampilan geometrisnya identik dan bukti yang sama menunjukkan bahwa:

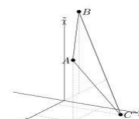
$$A \cdot B = |A||B| \cos \theta$$

Contoh 5:

Tunjukkan bahwa $A = (4, 3, 6)$, $B = (-2, 0, 8)$, $C = (1, 5, 0)$ adalah titik-titik atau simpul dari segitiga siku-siku.

Jawab:

Dua kaki segitiga itu adalah $\vec{AC} = (-3, 2, -6)$ dan $\vec{AB} = (-6, -2, 2) \Rightarrow \vec{AC} \cdot \vec{AB} = 18 - 6 - 12 = 0$. Tampilan geometris perkalian titik menunjukkan sudut antara kakinya $\frac{\pi}{2}$ (yaitu $\cos \theta = 0$).



Gambar 1. 13. Tampilan Geometris Dot Product

Kesalahan pertama ditemukan pada Bab Vektor tiga dimensi – Contoh 5, halaman 9. Modul meminta pembaca menunjukkan bahwa titik $A = (4, 3, 6)$, $B = (-2, 0, 8)$, dan $C = (1, 5, 0)$ membentuk segitiga siku-siku. Dalam solusi, modul menuliskan vektor $\vec{AC} = \langle -3, 2, -6 \rangle$ dan $\vec{AB} = \langle -6, -2, 2 \rangle$, lalu menghitung $\vec{AC} \cdot \vec{AC} = 18 - 6 - 12 = 0$ sebagai dasar kesimpulan bahwa segitiga tersebut siku-siku. Di sini ada dua ketidaktepatan: (1) pasangan vektor untuk uji ortogonalitas salah, seharusnya $\vec{AC} \cdot \vec{AB}$, bukan $\vec{AC} \cdot \vec{AC}$; (2) komponen $\vec{AB}$ yang dipakai dalam rumus tidak konsisten (angka di perhitungan cocok dengan $\langle -6, -3, 2 \rangle$, bukan $\langle -6, -2, 2 \rangle$). Secara teori, dot product vektor taknol dengan dirinya sendiri tidak pernah nol, sehingga pernyataan $\vec{AC} \cdot \vec{AC} = 0$ jelas salah. Verifikasi dengan jurnal tentang ruang hasil kali dalam menunjukkan bahwa ortogonalitas didefinisikan melalui syarat hasil kali dalam dua vektor berbeda sama dengan nol dan bahwa $\langle v, v \rangle > 0$ untuk setiap vektor taknol. Hal ini menegaskan bahwa prosedur yang benar adalah menghitung $\vec{AC} \cdot \vec{AB} = 0$, sementara bentuk yang ada di modul berpotensi menimbulkan miskonsepsi bahwa vektor taknol dapat memiliki dot product nol dengan dirinya sendiri.

Kesalahan 2: Penjelasan Dot Product dan Ortogonalitas Tanpa Syarat Vektor Tak nol

Definisi Istilah Ortogonal dan Pengujian Ortogonal

Ketika dua vektor tegak lurus satu sama lain, kita katakan itu ortogonal.

Seperti yang terlihat pada contoh, karena $\cos \frac{\pi}{2} = 0$, perkalian titik memberikan tes untuk ortogonalitas antar vektor:

$$A \perp B \Leftrightarrow A \cdot B = 0$$

Kesalahan kedua terletak pada definisi ortogonalitas dan tes dot product di halaman 10. Modul menjelaskan bahwa ketika dua vektor tegak lurus satu sama lain, keduanya dikatakan ortogonal, lalu langsung memberi kriteria aljabar $A \perp B \Leftrightarrow A \cdot B = 0$ tanpa menyebut syarat bahwa A dan B harus vektor tak nol dan tanpa membahas posisi khusus vektor nol. Padahal dalam penjelasan geometri, sudut antara vektor hanya didefinisikan bila kedua vektor tak nol. Ketidaktegasan ini membuka peluang bagi mahasiswa untuk menyimpulkan bahwa vektor nol “ortogonal terhadap semua vektor” hanya karena $0 \cdot B = 0$ secara aljabar, meskipun dari sudut pandang geometri vektor nol tidak memiliki arah. Hasil verifikasi dengan jurnal yang membahas ortogonalitas di ruang hasil kali dalam menunjukkan bahwa definisi ortogonalitas lahir dari sudut 90° dan kemudian diformalkan melalui hasil kali dalam sama dengan nol; karenanya, domain definisi sudut dan peran vektor nol harus dijelaskan dengan hati-hati. Ini menguatkan bahwa definisi di modul belum lengkap secara konseptual dan perlu diberi syarat atau catatan khusus tentang vektor nol.

Kesalahan 3: Perhitungan Proyeksi Vektor

Contoh 6:

Tentukan komponen A ke arah B jika $|A| = 2, |B| = 5, \theta = \pi/4$.

Jawab:

Mengacu pada gambar di atas: komponennya adalah $|A| \cos \theta = 2 \cos(\pi/4) = 2$. Perhatikan, panjang B diberikan tidak relevan, karena kita hanya peduli tentang vektor satuan yang sejajar B .

Kesalahan ketiga ditemukan pada Modul 1, subbab Komponen dan Proyeksi Vektor, Contoh 6, halaman 11. Dalam contoh tersebut, komponen vektor A ke arah B dengan $|A| = 2, |B| = 5$, dan $\theta = \pi/4$ dihitung sebagai $|A| \cos \theta = 2 \cos(\pi/4) = 2$. Secara konsep, rumus yang digunakan benar, tetapi nilai numeriknya keliru, karena $\cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2$, sehingga hasil yang

tepat adalah $2 \cdot \sqrt{2}/2 = \sqrt{2}$, bukan 2. Kesalahan ini bukan sekadar hitung kecil karena menyangkut nilai dasar trigonometri dan sifat umum proyeksi: komponen skalar searah B tidak boleh melebihi panjang A untuk sudut yang bukan 0° . Verifikasi dengan jurnal pengembangan media pembelajaran proyeksi vektor yang merumuskan komponen sebagai $|A| \cos \theta$ dan menggunakan nilai $\cos 45^\circ = \sqrt{2}/2$ menegaskan bahwa hasil modul harus diperbaiki menjadi $\sqrt{2}$.

Kesalahan 4: Minor Komponen j pada Definisi Cross Product Tertulis Salah

Definisi determinan untuk perkalian silang

Untuk vektor $A = (a_1, a_2, a_3)$ dan $B = (b_1, b_2, b_3)$ kami mendefinisikan produk silang dengan rumus berikut [2]:

$$A \times B = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$A \times B = (a_2 b_3 - a_3 b_2) \mathbf{i} - (a_1 b_3 - a_3 b_1) \mathbf{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \mathbf{k}$$

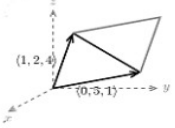
$$A \times B = (a_2 b_3 - a_3 b_2) \mathbf{i} - (a_1 b_3 - a_3 b_1) \mathbf{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \mathbf{k}$$

$$A \times B = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

Kesalahan keempat terdapat pada Bab I, halaman 12, bagian “Definisi determinan untuk perkalian silang”. Dalam penulisan determinan untuk komponen j , modul menggandakan indeks b_3 sehingga minor yang seharusnya $\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}$ tertulis menjadi $\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_3 & b_3 \end{vmatrix}$. Akibatnya rumus komponen tengah berubah dari $a_1 b_3 - a_3 b_1$ menjadi $(a_1 - a_3) b_3$, yang jelas salah dan menghasilkan vektor silang yang komponen j -nya menyimpang. Ketika diuji dengan contoh numerik, bentuk salah ini dapat memberikan hasil vektor yang jauh berbeda baik arah maupun besarnya, sehingga akan mengacaukan perhitungan normal bidang, luas jajar genjang, dan aplikasi lain yang bergantung pada cross product. Verifikasi melalui artikel pendidikan matematika yang mengajarkan hasil kali silang dengan determinan 3×3 menunjukkan bahwa bentuk standar komponen cross product selalu melibatkan b_1, b_2, b_3 secara berurutan, sehingga penulisan b_3, b_3 pada minor jelas merupakan kesalahan konsep notasi, bukan sekadar tipe.

Kesalahan 5: Penjelasan Luas Segitiga dengan Cross Product Kurang Tepat

Jawab:
 Luas segitiga adalah setengah luas jajaran genjang (lihat gambar).



Gambar 1. 18. Jajar Genjang di Tiga Dimensi

Jadi, luas segitiga = $\frac{1}{2} |(1,2,4) \times (0,5,1)|$

$$(1,2,4) \times (0,5,1) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix} = i(-18) - j + 5k$$

Luas segitiga = $\frac{1}{2} \sqrt{18^2 + (-1)^2 + 5^2} = \frac{1}{2} \sqrt{350}$.

Kesalahan kelima muncul pada Contoh 12 tentang segitiga di tiga dimensi, halaman 15, ketika modul menuliskan luas segitiga langsung sebagai $\frac{1}{2} |(1,2,4) \times (0,5,1)|$ tanpa menjelaskan bahwa vektor $(1,2,4)$ dan $(0,5,1)$ diambil sebagai vektor sisi segitiga dari titik asal. Dari sudut pandang geometri, rumus luas segitiga di ruang tiga dimensi adalah $\frac{1}{2} |\vec{PQ} \times \vec{PR}|$, dengan $\vec{PQ}$ dan $\vec{PR}$ vektor sisi segitiga. Penulisan modul yang langsung menggunakan koordinat dua titik sebagai argumen cross product, tanpa menyebut bahwa segitiga memiliki vertex di origin atau tanpa menulis vektor selisih, berpotensi menanamkan miskonsepsi bahwa “koordinat titik boleh langsung dicross-product” untuk menghitung luas. Verifikasi dengan prosiding yang membahas luas permukaan di $\mathbb{R}^3$ menggunakan norm cross product menegaskan bahwa vektor yang dipakai haruslah vektor sisi (selisih dua titik), sehingga cara presentasi di modul perlu diluruskan dengan menyebut titik-titik dan vektor sisi secara eksplisit.

Kesalahan 6: Definisi Perkalian Matriks Mengabaikan Sifat Tidak Komutatif

DEFINISI 5

Jika A adalah matriks $m \times r$ dan B adalah matriks $r \times n$, maka produk AB adalah matriks $m \times n$ yang entri ditentukan sebagai berikut: Untuk menemukan entri dalam baris i dan kolom j dari AB, pilih satu baris i dari matriks A dan kolom j dari matriks B. Gandakan entri yang sesuai dari baris dan kolom bersama-sama, dan kemudian tambahkan produk yang dihasilkan.

Kesalahan keenam terdapat pada Bab Matriks dan Operasi Matriks, subbab Perkalian Matriks (Definisi 5), halaman 42. Definisi yang diberikan sudah benar untuk menjelaskan bagaimana

menentukan entri matriks hasil AB dari matriks A ber-ordo $m \times r$ dan B berordo $r \times n$. Namun modul sama sekali tidak menyinggung bahwa perkalian matriks tidak komutatif pada umumnya, dan bahwa BA bisa saja tidak terdefinisi meskipun AB terdefinisi. Ketiadaan penekanan ini berbahaya secara pedagogis karena mahasiswa cenderung membawa intuisi komutatif dari bilangan real ke matriks, lalu menganggap $AB = BA$ “selama ordo cocok”. Hasil analisis dan verifikasi dengan jurnal yang mengkaji pemahaman konsep perkalian matriks di sekolah menengah menunjukkan bahwa banyak kesalahan siswa bersumber dari kecenderungan memperlakukan matriks “seperti bilangan biasa”. Ini menguatkan kritik bahwa modul seharusnya menambahkan penjelasan eksplisit tentang syarat ordo dan sifat tidak komutatif saat pertama kali memperkenalkan perkalian matriks.

Kesalahan 7: Definisi Trace Matriks Kurang Lengkap

DEFINISI 8

Jika A adalah matriks persegi, maka jejak A, dilambangkan dengan $\text{tr}(A)$, didefinisikan sebagai jumlah dari entri pada diagonal utama A. Jejak A tidak terdefinisi jika A bukan matriks persegi.

Kesalahan ketujuh dijumpai pada subbab Trace Matriks, Definisi 8, halaman 50. Modul mendefinisikan trace secara lisan sebagai “jumlah entri pada diagonal utama” tanpa menegaskan bahwa definisi ini hanya berlaku untuk matriks persegi dan tanpa menuliskan rumus formal $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$ untuk A berordo $n \times n$. Akibatnya, pembaca dapat salah menggeneralisasi bahwa setiap matriks $m \times n$ memiliki trace cukup dengan menjumlahkan entri $(1,1)$, $(2,2)$, dan seterusnya, padahal dalam teori aljabar linear trace didefinisikan khusus untuk matriks bujursangkar dan terkait dengan sifat-sifat penting seperti invariansi terhadap kesamaan matriks dan hubungan dengan jumlah nilai eigen. Verifikasi melalui jurnal tentang trace matriks khusus $n \times n$ menegaskan bahwa trace hanya diperkenankan untuk matriks persegi dan tidak didefinisikan untuk matriks tak persegi. Ini menunjukkan bahwa definisi modul perlu diperkaya dengan syarat domain (matriks persegi) dan penegasan bahwa trace tidak didefinisikan untuk matriks non-persegi.

Kesalahan 8: Notasi Matriks Eyang Tidak Konsisten

4. Misalkan A, B, C, D dan E adalah matriks berikut:

$$\begin{matrix} A & B & C \\ (4 \times 5) & (4 \times 5) & (5 \times 4) \end{matrix}$$

Dari matriks di atas, tentukan terdefinisi. Untuk matriks yang terdefinisi matriks berikut:

5. Misalkan A, B, C, D dan E adalah matriks berikut:

$$\begin{matrix} A & B & C \\ (3 \times 1) & (3 \times 6) & (6 \times 3) \end{matrix}$$

Dari matriks di atas, tentukan apakah terdefinisi. Untuk matriks yang terdefinisi matriks berikut:

6. Perhatikan matriks-matriks berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Dari matriks-matriks tersebut, hitung

(a) $D + E$

Kesalahan kedelapan berkaitan dengan konsistensi notasi dalam latihan pada subbab Matriks dan Operasi Matriks, halaman 51–52. Dalam beberapa soal, simbol yang sama, yaitu E , dipakai bergantian sebagai matriks berordo 2×3 , kemudian 3×2 , bahkan sebagai vektor kolom, tanpa deklarasi ulang yang eksplisit bahwa E kini merujuk ke objek yang berbeda. Secara matematis, ordo matriks menentukan boleh tidaknya operasi seperti penjumlahan dan perkalian dilakukan, sehingga perubahan ordo tanpa penjelasan membingungkan pembaca ketika memeriksa apakah ekspresi seperti DE , $AE + E$, atau $E^T A$ terdefinisi. Analisis menunjukkan bahwa praktik ini dapat menumbuhkan miskonsepsi bahwa simbol matriks dapat bebas “berganti ukuran” tanpa konsekuensi, padahal dalam aljabar linear simbol dan ordo merupakan identitas objek. Verifikasi dengan jurnal pengembangan media pembelajaran matriks yang menekankan pentingnya ordo dan konsistensi notasi dalam operasi matriks mendukung bahwa satu simbol sebaiknya konsisten untuk satu objek atau diberi indeks jika objeknya berbeda.

Kesalahan 9: Definisi Fungsi Dua Peubah yang Tidak Lengkap

Fungsi Dua Variabel

Fungsi dua variabel adalah fungsi yang memuat sebanyak dua variabel. Untuk memahami fungsi dua variabel atau lebih, perhatikan contoh berikut:

Contoh 1:

$$f(x, y) = x^2 + y^2 \Rightarrow f(1, 2) = 5 \text{ dll.}$$

$$f(x, y) = xy^2 e^{x+y}$$

$$f(x, y, z) = xy \log z$$

$$\text{Hukum gas ideal: } P = kT/V.$$

Kesalahan kesembilan berada pada Modul 4: Fungsi Dua Variabel, halaman 109, di bagian pembuka definisi fungsi dua variabel. Modul menuliskan secara ringkas bahwa “fungsi dua variabel adalah fungsi yang memuat sebanyak dua variabel” dan langsung memberi contoh, tanpa menyebut domain $D \subset \mathbb{R}^2$, kodomain (misalnya $\mathbb{R}$), dan tanpa menegaskan sifat keunikan output (setiap (x, y) dipetakan ke tepat satu nilai). Definisi seperti ini kurang memadai secara formal karena tidak mengajarkan mahasiswa untuk selalu menentukan domain dan tidak menempatkan fungsi sebagai pemetaan $f: D \rightarrow \mathbb{R}$. Hasil analisis dan verifikasi dengan jurnal pendidikan matematika yang mengkaji pembelajaran fungsi dua variabel menunjukkan bahwa pemahaman konsep domain dan range sangat menentukan keberhasilan mahasiswa dalam topik grafik permukaan, contour plot, limit multivariat, dan turunan parsial. Jurnal tersebut menekankan perlunya pengenalan fungsi dua peubah dimulai dari pemetaan $f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ yang single-valued, sehingga definisi di modul memang perlu diperbaiki agar eksplisit menyebut domain, kodomain, dan sifat pemetaan.

Kesalahan 10: Penjelasan Konsep Gradien Terlalu Sempit

Definisi Gradien

Misalkan $w = f(x, y)$ maka $\partial w / \partial x$ dan $\partial w / \partial y$ adalah laju perubahan w dalam arah i dan j . Maka vektor dari $\partial w / \partial x$ dan $\partial w / \partial y$ disebut gradien w , dinotasikan dengan:

$$\text{grad } w = \nabla w = \left(\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y} \right)$$

Untuk $w = f(x, y, z)$ maka gradiennya adalah:

$$\text{grad } w = \nabla w = \left(\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial z} \right)$$

Jika kita tentukan sebuah titik $P_0 = (x_0, y_0)$, kita dapat menentukan gradien di titik tersebut, dengan notasi:

155

ATURAN BANTAL TURUNAN TOTAL & BERARAH, PENGALIHAN RANGKAI

$$\text{grad } w(x_0, y_0) = \nabla w|_{P_0} = \nabla w|_0 = \left(\frac{\partial w}{\partial x} \Big|_0, \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_0 \right)$$

Kesalahan kesepuluh dijumpai pada Modul 5: “Aturan Rantai, Turunan Total & Berarah, Pengali Lagrange”, halaman 155–156, ketika membahas gradien. Modul menekankan bahwa gradien ∇f “menunjuk ke arah pertambahan terbesar dari f ” tetapi tidak menjelaskan bahwa besar (norma) gradien menyatakan laju perubahan maksimum tersebut dan bahwa gradien selalu tegak lurus kurva level atau permukaan level fungsi. Selain itu, hubungan eksplisit antara gradien dan turunan berarah tidak muncul dalam penjelasan. Akibatnya, mahasiswa cenderung memahami gradien hanya sebagai “vektor arah tercepat naik” tanpa mengaitkannya dengan nilai maksimum turunan berarah dan geometri kontur. Verifikasi melalui artikel yang meneliti kesulitan mahasiswa dalam memaknai gradien dan turunan berarah menunjukkan bahwa banyak mahasiswa menganggap gradien sekadar vektor arah dan tidak menangkap maknanya sebagai ukuran laju perubahan maksimum dan normal terhadap kurva/permukaan level. Hal ini menguatkan bahwa penyajian gradien di modul terlalu sempit dan perlu diperluas agar memasukkan baik arah maupun magnitudo, serta keterkaitannya dengan turunan berarah dan geometri kontur.

Pembahasan

Bagian pembahasan mengaitkan sepuluh temuan kesalahan tersebut dengan teori pembelajaran matematika dan karakteristik materi kalkulus multivariabel. Pada bagian ini, setiap jenis kesalahan dianalisis implikasinya terhadap pemahaman konsep mahasiswa, potensi munculnya miskonsepsi baru, serta arah perbaikan yang perlu dilakukan dalam pengembangan bahan ajar.

1. Dot product dan contoh segitiga siku-siku

Temuan pertama menunjukkan bahwa kesalahan perhitungan sederhana pada dot product dapat berujung pada kesimpulan geometris yang keliru, yaitu klaim bahwa segitiga tertentu siku-siku padahal pasangan vektor yang diuji tidak tepat dan dot product vektor dengan dirinya sendiri disamakan dengan nol. Secara konseptual, hal ini mengaburkan fakta mendasar bahwa $v \cdot v > 0$ untuk setiap vektor tak nol, sekaligus mengacaukan penggunaan dot product sebagai alat uji ortogonalitas. Dari sisi pedagogis, contoh yang salah justru akan “mengukuhkan” prosedur

yang keliru di memori mahasiswa karena contoh bekerja sebagai prototipe cara berpikir. Modul perlu menonjolkan pemilihan vektor sisi yang tepat, menegaskan sifat positif definit dot product, dan melengkapi contoh dengan latihan serupa agar mahasiswa terbiasa memeriksa kembali hubungan antara perhitungan aljabar dan interpretasi geometrisnya (Nabila et al., 2024).

2. Definisi ortogonalitas tanpa syarat vektor tak nol

Kesalahan kedua memperlihatkan bagaimana definisi yang tidak lengkap, menyatakan $A \perp B \Leftrightarrow A \cdot B = 0$ tanpa syarat $A \neq 0$ dan $B \neq 0$ —dapat menciptakan ketegangan antara pendekatan geometri dan aljabar. Secara geometri, sudut antara vektor hanya bermakna untuk vektor tak nol; namun secara aljabar, vektor nol memang menghasilkan dot product nol terhadap semua vektor. Ketika buku tidak menjelaskan perbedaan dua sudut pandang ini, mahasiswa berpotensi mengira bahwa vektor nol “tegak lurus terhadap semua vektor”, tetapi sekaligus dianjurkan membayangkan ortogonalitas sebagai sudut 90° . Inkonsistensi ini berbahaya bagi topik-topik lanjut seperti basis ortonormal, proyeksi, dan Gram-Schmidt. Karena itu, bahan ajar perlu secara eksplisit menyatakan domain definisi (dua vektor tak nol) ketika memakai bahasa “tegak lurus”, serta memberikan catatan khusus tentang posisi vektor nol dalam kerangka ruang hasil kali dalam (Nabila et al., 2024).

3. Proyeksi vektor dan kekeliruan nilai trigonometrik

Kesalahan ketiga berakar pada perhitungan $2\cos(\pi/4) = 2$, yang mengabaikan fakta bahwa $\cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2$. Meskipun tampak sebagai kekeliruan numerik kecil, dampaknya konseptual cukup besar: mahasiswa bisa menyimpulkan bahwa komponen vektor pada suatu arah dapat sama dengan panjang vektor meski sudutnya bukan nol, bertentangan dengan prinsip $|A| \cos \theta \leq |A|$. Di sisi lain, nilai khusus fungsi trigonometri seperti $\cos 45^\circ$ merupakan fondasi bagi banyak topik kalkulus dan analisis. Kesalahan ini menunjukkan bahwa buku teks tidak hanya harus tepat secara simbolik, tetapi juga harus menjaga konsistensi antara geometri segitiga, nilai-nilai trigonometri khusus, dan interpretasi proyeksi sebagai “bayangan” vektor pada suatu arah. Perbaikan bahan ajar perlu

memasukkan penguatan konsep dengan ilustrasi segitiga siku-siku dan latihan numerik yang menekankan bahwa panjang proyeksi berkurang ketika sudut menjauh dari 0° (Handayani & Rahayu, 2020).

4. Rumus cross product dan ketelitian notasi

Kesalahan pada minor komponen j dalam rumus cross product menunjukkan bahwa kesalahan satu indeks saja dapat mengubah arah dan besar vektor hasil secara drastis. Karena cross product diandalkan untuk menentukan vektor normal bidang, menghitung torsi, maupun luas jajargenjang di ruang tiga dimensi, rumus yang salah akan merambat ke banyak aplikasi. Secara pedagogis, siswa yang baru belajar cross product biasanya memegang kuat “resep determinan 3×3 ” sebagai algoritma utama; jika resep dalam buku sudah keliru, maka seluruh prosedur mental mereka ikut menyimpang. Hal ini menggarisbawahi pentingnya penulisan rumus secara benar, disertai contoh numerik yang diverifikasi dan catatan tentang makna geometris hasil cross product (tegak lurus dua vektor pembentuk). Bahan ajar yang baik perlu menyeimbangkan prosedur determinan dengan penjelasan konsep “arah normal” sehingga mahasiswa tidak hanya menghafal pola tanda, tetapi juga memahami mengapa rumus tersebut harus tepat (Suwandi, 2015).

5. Luas segitiga dengan cross product dan pembedaan titik-vektor

Pembahasan luas segitiga yang langsung menuliskan $\frac{1}{2} |(1,2,4) \times (0,5,1)|$ tanpa menjelaskan bahwa kedua vektor tersebut adalah vektor sisi dari titik asal, memperlihatkan bagaimana buku mengaburkan perbedaan antara titik dan vektor. Secara konseptual, rumus luas segitiga $\frac{1}{2} |\vec{PQ} \times \vec{PR}|$ berangkat dari gagasan bahwa cross product mengukur luas jajargenjang yang dibentang oleh dua vektor sisi. Jika mahasiswa tidak dibiasakan menuliskan $\vec{PQ} = Q - P$ dan $\vec{PR} = R - P$, mereka dapat menggeneralisasi secara salah: setiap dua titik di ruang boleh langsung dicross-product untuk mencari luas segitiga. Ini merusak pemahaman bahwa vektor selalu berkaitan dengan selisih posisi. Dengan demikian, bahan ajar perlu menampilkan langkah eksplisit pembentukan

vektor sisi dari koordinat titik, memberi contoh tandingan yang tidak melalui titik asal, dan menegaskan bahwa operasi cross product selalu bekerja pada vektor, bukan sekadar pada koordinat titik yang diambil sembarang (Fadilah et al., 2019).

6. Perkalian matriks dan pengabaian sifat tidak komutatif

Definisi perkalian matriks yang hanya menekankan cara menghitung entri AB tanpa menyebut bahwa operasi ini tidak komutatif mengundang mahasiswa membawa intuisi salah dari aritmetika bilangan real. Ketika sifat $a \cdot b = b \cdot a$ diasosiasikan begitu saja dengan matriks, konsekuensinya adalah kesalahan dalam menyusun model aljabar, misalnya pada komposisi transformasi linier, manipulasi sistem persamaan linear, maupun penyusunan persamaan dinamik. Dalam pembelajaran, guru lalu harus “memperbaiki” intuisi tersebut di tahap yang lebih lanjut, yang tentu lebih sulit dibandingkan menjelaskan sejak awal bahwa urutan matriks menggambarkan urutan operasi dan tidak boleh ditukar. Implikasi untuk bahan ajar adalah bahwa setiap definisi operasi penting sebaiknya disertai sifat-sifat kuncinya (seperti syarat ordo dan ketidakkomutatifan), bukan hanya algoritma perhitungan, serta didukung oleh contoh dan noncontoh yang eksplisit (Pratama et al., 2024).

7. Trace matriks dan pentingnya domain definisi

Definisi trace sebagai “jumlah entri diagonal utama” tanpa penegasan bahwa matriks harus persegi menunjukkan kecenderungan buku untuk memotong konteks teoretis demi kepraktisan. Secara aljabar, trace adalah fungsi yang didefinisikan pada himpunan matriks persegi dan memiliki banyak sifat penting, misalnya berkaitan dengan jumlah eigenvalue dan invariansi terhadap kesamaan matriks. Tanpa menyebut domain ini, mahasiswa dapat dengan mudah menerapkan “trace” pada matriks tidak persegi dan kemudian bingung ketika sifat-sifat teoretis tidak lagi berlaku. Dari sudut pandang pedagogis, hal ini melemahkan kemampuan mereka untuk melihat hubungan antara konsep dasar dan teori yang lebih tinggi. Oleh karena itu, bahan ajar harus menekankan bahwa setiap definisi memerlukan domain yang jelas, serta

memberi contoh dan noncontoh yang menunjukkan kapan suatu operasi terdefinisi dan kapan tidak (Marzuki et al., 2021).

8. Notasi matriks yang tidak konsisten
Penggunaan simbol E untuk matriks 2×3 , kemudian 3×2 , lalu vektor kolom 2×1 tanpa deklarasi ulang menggambarkan bahwa buku kurang memperhatikan konsistensi notasi sebagai bagian dari pembentukan konsep. Dalam aljabar linear, sebuah simbol biasanya merepresentasikan satu objek dengan ordo tertentu; perubahan ordo mengubah sifat operasi yang mungkin dilakukan. Ketika satu simbol “berpindah-pindah bentuk” tanpa penjelasan, mahasiswa bisa menyimpulkan bahwa ukuran matriks hanyalah rincian teknis yang bisa diabaikan, padahal justru dimensi inilah yang menentukan kelayakan operasi. Secara pedagogis, notasi yang tidak konsisten mengganggu kemampuan siswa untuk menelusuri argumen dan melatih penalaran formal. Implikasi bagi bahan ajar adalah perlunya disiplin notasi: setiap objek baru diberi simbol baru atau indeks, dan setiap perubahan konteks dinyatakan dengan jelas agar struktur logika materi tetap terjaga (Surur et al., 2021).

9. Definisi fungsi dua peubah yang terlalu ringkas

Definisi fungsi dua peubah yang hanya berbunyi “fungsi yang memuat dua variabel” mengabaikan tiga komponen fundamental: domain, kodomain, dan keunikan pemetaan. Akibatnya, mahasiswa mudah terjebak pada cara pandang “fungsi sebagai rumus” tanpa merasa perlu memeriksa di mana rumus itu terdefinisi dan jenis nilai apa yang dihasilkannya. Dalam kalkulus peubah banyak, domain memegang peranan sentral pada pembahasan limit, kontinuitas, turunan parsial, dan integral lipat dua; mengabaikannya sejak definisi awal berarti memaksa mahasiswa membangun pemahaman lanjut di atas fondasi yang rapuh. Dari perspektif pengembangan bahan ajar, definisi fungsi dua peubah seharusnya ditulis dalam bentuk pemetaan $f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ yang eksplisit, disertai contoh penentuan domain dan diskusi tentang mengapa satu pasangan (x, y) harus dipetakan ke tepat satu nilai $f(x, y)$. Pendekatan ini akan membantu mahasiswa menghubungkan kembali pengalaman mereka dengan fungsi satu variabel

ke konteks multivariabel (Hapizah et al., 2019).

Konsep gradien sebagai jembatan antara analisis dan geometri

Pembahasan gradien yang hanya menekankan “arah pertambahan terbesar” menghilangkan dua aspek penting: bahwa magnitudo gradien menyatakan laju perubahan maksimum dan bahwa gradien tegak lurus terhadap kurva atau permukaan level. Tanpa kedua aspek ini, gradien direduksi menjadi sekadar “vektor arah” yang kabur maknanya, sehingga hubungan dengan turunan berarah, kontur, dan optimasi multivariat menjadi terputus. Secara pedagogis, hal ini membuat mahasiswa sulit melihat mengapa ∇f begitu sentral dalam berbagai aplikasi, mulai dari mencari titik ekstrem hingga menafsirkan peta kontur dan medan gaya. Bahan ajar yang baik perlu menampilkan gradien sebagai objek yang menyatukan informasi arah dan besar perubahan, diperkuat dengan visualisasi kontur, contoh perhitungan turunan berarah, serta penjelasan bahwa maksimum turunan berarah selalu terjadi searah gradien. Dengan demikian, gradien tidak lagi dipahami sekadar sebagai rumus komponen, tetapi sebagai konsep kunci yang menghubungkan analisis dan geometri dalam kalkulus peubah banyak (Mudya et al., 2025).

Kesimpulan

Penelitian ini telah melaksanakan *critical book report* terhadap modul *Kalkulus Peubah Banyak* dengan fokus pada analisis pedagogis dan konseptual. Melalui telaah sistematis terhadap isi modul, ditemukan sedikitnya sepuluh bentuk kesalahan yang mencakup kesalahan prosedural, notasi, dan terutama kekeliruan konsep dasar, mulai dari dot product dan ortogonalitas, proyeksi vektor, rumus cross product dan luas segitiga, operasi matriks (perkalian, trace, dan konsistensi ordo), hingga definisi fungsi dua peubah dan konsep gradien. Kesalahan-kesalahan tersebut bukan sekadar “typo”, tetapi berpotensi langsung menimbulkan miskonsepsi, karena muncul pada bagian-bagian kunci yang menjadi pijakan bagi topik lanjut seperti optimasi, integral lipat, dan analisis vektor di ruang tiga dimensi. Dari sisi pedagogis, hasil penelitian menunjukkan bahwa beberapa bagian modul terlalu menekankan prosedur hitung tanpa memperjelas domain definisi, syarat berlakunya rumus,

maupun makna geometris dan aplikatif dari konsep yang dibahas. Hal ini berisiko mendorong mahasiswa untuk menghafal rumus tanpa pemahaman mendalam, misalnya mengira dot product vektor dengan dirinya sendiri dapat bernilai nol, menganggap perkalian matriks selalu komutatif, atau memahami gradien hanya sebagai “arah naik terbesar” tanpa kaitan dengan turunan berarah dan kontur. Temuan tersebut menegaskan pentingnya konsistensi notasi, kejelasan definisi formal, serta penyajian contoh dan noncontoh yang eksplisit dalam pengembangan bahan ajar kalkulus peubah banyak.

Secara praktis, penelitian ini merekomendasikan agar modul direvisi dengan: (1) memperbaiki rumus dan perhitungan yang keliru, (2) menambahkan definisi formal yang lengkap (domain, kodomain, dan syarat penggunaan rumus), (3) memperjelas perbedaan titik-vektor, bilangan-matriks, serta lokal-global dalam konteks ekstrem, dan (4) melengkapi penjelasan konsep kunci seperti fungsi dua peubah dan gradien dengan ilustrasi geometris dan latihan terarah. Selain itu, hasil penelitian mengindikasikan bahwa pendekatan *critical book report* efektif untuk mengevaluasi kualitas buku ajar di perguruan tinggi, sehingga dapat direplikasi untuk mata kuliah lain atau modul kalkulus yang berbeda. Dengan demikian, penelitian ini diharapkan berkontribusi pada peningkatan kualitas bahan ajar kalkulus peubah banyak, sekaligus menjadi dasar bagi dosen dan pengembang kurikulum dalam merancang pembelajaran yang lebih konseptual, konsisten, dan bebas dari miskonsepsi.

Daftar Pustaka

- Afifah, D. S. N., Nafi'an, M. I., & Putri, I. M. (2018). Analisis kesalahan mahasiswa dalam menyelesaikan soal kalkulus peubah banyak. *Jurnal Matematika Dan Pembelajaran*, 6(2), 207–220.
- Annajmi, & Isharyadi, R. (2019). ANALISIS KEBUTUHAN PENGEMBANGAN BAHAN AJAR BERBANTUAN SOFTWARE GEOGEBRA BAGI MAHASISWA PENDIDIKAN MATEMATIKA UNIVERSITAS PASIR PANGRAIAN ANALYSIS OF THE NEEDS OF DEVELOPING MULTIVARIABLE CALCULUS TEACHING MATERIALS ASSISTED BY GEOGEBRA SOFTWARE FOR MATHE. *JURNAL MATEMATIKA DAN PENDIDIKAN MATEMATIKA*, 4(2), 85–97.
- Arroida, A. K. (2018). *Analisis Buku Teks Pelajaran Matematika Wajib Kelas X SMA Analysis of 10 th Grade Mathematics Textbooks*. 7(3).
- Fadilah, A. N., Gunawan, G., & Sukarsih, I. (2019). Menghitung Luas suatu Permukaan di ?? Menggunakan Aproksimasi Bidang Singgung dan Norm Cross Product. *Prosiding Matematika*, 5(2), 75–79.
- Farhan, M., & Zulkarnain, I. (2019). Analisis Kesalahan Mahasiswa pada Mata Kuliah Kalkulus Peubah Banyak Berdasarkan Newmann ' s Error Analysis. *Jurnal Kajian Pendidikan Matematika*, 4(2), 121–134.
- Handayani, D., & Rahayu, D. V. (2020). PENGEMBANGAN MEDIA PEMBELAJARAN INTERAKTIF BERBASIS ANDROID MENGGUNAKAN I-SPRING DAN APK BUILDER Development of Android-Based Interactive Learning Media Using I-Spring And Apk Builders. *JURNAL MATEMATIKA DAN PENDIDIKAN MATEMATIKA*, 5(1), 12–25.
- Hapizah, Somakim, & Yusup, M. (2019). STRATEGI PROBING PROMPTING DALAM UPAYA. *Jurnal Pendidikan Matematika*, 13(2), 113–120.
- Ilmadi, Valentika, N., & Sastro, G. (2020). PENGEMBANGAN BAHAN AJAR KALKULUS BERBASIS MASALAH DENGAN BANTUAN SOFTWARE GRAPMATICA PADA MATERI. *Jurnal Karya Pendidikan Matematika*, 7(2), 67–72.

- Kurniawati, W., Rusdiana, & Basir, A. (2022). Jurnal PRIMATIKA, Volume 11, Nomor 1, Juni 2022. *Jurnal PRIMATIKA*, 11(1), 21–30.
- Marzuki, C. C., Aryani, F., & Rahmawati. (2021). Jurnal Sains Matematika dan Statistika Trace Matriks 2×2 Berbentuk Khusus Berpangkat Bilangan Bulat Positif. *Jurnal Sains Matematika Dan Statistika*, 7(1), 28–37.
- Moneta, A. S., & Susanto, E. (2020). ANALISIS BUKU TEKS MATEMATIKA SMP KELAS VIII KURIKULUM 2013 EDISI REVISI 2017 BERDASARKAN STANDAR BSNP. *Jurnal Penelitian Pembelajaran Matematika Sekolah (JP2MS)*, 4(3), 327–339.
- Mudya, Y., Maulida, R., Ifani, M., & Narpila, S. D. (2025). Analisis Kesulitan Belajar Mahasiswa dalam Mempelajari Materi Medan Vektor pada Mata Kuliah Kalkulus Vektor. *Publikasi Ilmu Pendidikan, Bahasa Dan Matematika*, 3(4), 92–99.
- Nabila, D., Sylviani, S., & Triska, A. (2024). EKSPLORASI SIFAT-SIFAT KEORTOGONALAN. *Jurnal Riset Dan Aplikasi Matematika (JRAM)*, 08(01), 1–5.
- Pratama, H., Angraini, D., & Afif, M. (2024). Analisis Pemahaman Konsep Perkalian Matriks dalam Pembelajaran Matematika. *Jurnal Keilmuan Pendidikan Matematika*, 3(3), 152–158.
- Soebagyo, J., Umam, K., Purwanto, S. E., Maarif, S., & Nuriadin, I. (2021). *MODUL PEMBELAJARAN: KALKULUS PEUBAH BANYAK*. Bandung: Media Sains Indonesia (CV. Media Sains Indonesia) Melong Asih.
- Surur, A. M., Ummayyasari, N., Uswah, A. H. H., Putri, A. K., Uswah, H., Qotrunnada, S., & Nabillah, F. F. N. (2021). Jurnal Pendidikan Sains dan Komputer Pengembangan Media Pembelajaran Matematika pada Materi Matriks dengan menggunakan Kotak Matriks (KoMat) Jurnal Pendidikan Sains dan Komputer. *Jurnal Pendidikan Sains Dan Komputer*, 1(1), 46–55.
- Suwandi. (2015). Pengajaran hasil kali titik dan hasil kali silang pada vektor serta beberapa pengembangannya. *Jurnal Ilmiah Edu Research*, 4(1), 1–8.
- Wahyuni, A., Hidayati, D. W., & Ivet, U. (2020). Analisis kemampuan pemahaman matematis pada mata kuliah kalkulus peubah banyak. *JURNAL INOVASI PENDIDIKAN MATEMATIKA*, 2(5), 142–147.