ANALISIS KESALAHAN dan SARAN PERBAIKAN pada BUKU *MULTIVARIABLE CALCULUS* KARYA DON SHIMAMATO”

Suwanto, Erlanda Samuel Purba, Aloi Hasugian, Edwina Pardosi, Maria Florentina Togatorop

Pendidikan Matematika, UNIMED

Email : suwantompd89@gmail.com erlandasamuelpurba@gmail.com , aloihasugian478@gmail.com edwinadosii@gmail.com togatoropmaria5@gmail.com

ABSTRAK

Buku teks memiliki peran sentral dalam pembelajaran kalkulus multivariabel karena menjadi rujukan utama bagi dosen dan mahasiswa dalam memahami konsep-konsep penting seperti ruang vektor, transformasi linear, fungsi beberapa variabel, kurva parametrik, kelengkungan, serta sistem koordinat. Ketidaktepatan dalam penyajian konsep, definisi, maupun contoh dalam buku teks berpotensi menimbulkan miskonsepsi yang bersifat jangka panjang dan menghambat keberhasilan pembelajaran pada tingkat perguruan tinggi. Berdasarkan urgensi tersebut, penelitian ini bertujuan untuk menganalisis kesalahan dan merumuskan saran perbaikan terhadap buku *Multivariable Calculus* karya Don Shimamato, sehingga kualitas isi dan kelayakannya sebagai buku ajar dapat dinilai secara lebih sistematis dan objektif.

Penelitian ini menggunakan pendekatan kualitatif dengan jenis studi kepustakaan (*library research*) dan teknik analisis isi (*content analysis*). Sumber data utama adalah teks lengkap buku *Multivariable Calculus* karya Don Shimamato, sedangkan sumber data pendukung meliputi buku-buku standar kalkulus, analisis, aljabar linear, topologi, dan geometri diferensial, serta artikel jurnal pendidikan matematika yang relevan. Data dikumpulkan melalui pembacaan menyeluruh, identifikasi bagian yang berpotensi mengandung kekeliruan, pencatatan sistematis, dan perbandingan terarah dengan referensi acuan. Hasil penelitian menunjukkan bahwa dalam buku tersebut terdapat berbagai bentuk kesalahan yang dapat diklasifikasikan ke dalam empat kategori utama, yaitu: (1) kesalahan konseptual, yang berkaitan dengan perumusan dan penjelasan konsep yang tidak selaras dengan definisi baku; (2) kesalahan ontologis, berupa kekeliruan dalam memaknai jenis dan kedudukan objek matematika; (3) kesalahan terminologis, yang menyangkut penggunaan istilah dan bahasa matematika yang kurang tepat atau tidak konsisten; serta (4) kesalahan teknis, berupa kekeliruan perhitungan, notasi, dan contoh. Kesalahan-kesalahan tersebut berpotensi menimbulkan miskonsepsi dan mengaburkan pemahaman mahasiswa apabila buku digunakan tanpa klarifikasi atau koreksi tambahan.

Berdasarkan temuan tersebut, penelitian ini menyusun sejumlah saran perbaikan berupa rumusan ulang definisi, penjelasan, dan contoh yang disesuaikan dengan literatur standar dan karakteristik mahasiswa pada jenjang sarjana. Secara umum, hasil penelitian menegaskan pentingnya telaah kritis dan pengujian akademik terhadap buku teks matematika yang digunakan dalam pembelajaran, serta menunjukkan bahwa analisis kesalahan buku ajar merupakan langkah penting dalam upaya peningkatan mutu pembelajaran kalkulus multivariabel di perguruan tinggi.

Kata kunci*: kalkulus multivariabel, analisis buku teks, kesalahan konseptual, kesalahan ontologis, saran perbaikan.*

ABSTRACT

Textbooks play a central role in multivariable calculus instruction because they are the main reference for lecturers and students to understand important concepts such as vector spaces, linear transformations, multivariable functions, parametric curves, curvature, and coordinate systems. Inaccuracies in the presentation of concepts, definitions, or examples in textbooks can potentially cause long-lasting misconceptions and hinder successful learning at the university level. Given this urgency, this study aims to analyze errors and formulate suggestions for improvement for the textbook Multivariable Calculus by Don Shimamato, so that the content quality and its suitability as a textbook can be assessed more systematically and objectively.

This research uses a qualitative approach with a library-research design and content analysis technique. The main data source is the full text of Multivariable Calculus by Don Shimamato, while supporting data sources include standard textbooks in calculus, analysis, linear algebra, topology, and differential geometry, as well as relevant mathematics education journal articles. Data were collected through thorough reading, identification of sections potentially containing errors, systematic recording, and directed comparison with standard reference works.

The results indicate that the book contains various forms of errors, which can be classified into four main categories: (1) conceptual errors, related to formulations and explanations of concepts that are not aligned with standard definitions; (2) ontological errors, consisting of misinterpretations concerning the type and status of mathematical objects; (3) terminological errors, concerning the use of mathematical terminology and language that are imprecise or inconsistent; and (4) technical errors, consisting of mistakes in calculations, notation, and examples. Such errors have the potential to cause misconceptions and obscure students' understanding if the book is used without additional clarification or correction.

Based on these findings, the study formulates several suggestions for improvement in the form of rewriting definitions, explanations, and examples in accordance with standard literature and the characteristics of undergraduate students. In general, the results of this research emphasize the importance of critical review and academic scrutiny of mathematics textbooks used in teaching, and show that error analysis of textbooks is an important step in the effort to improve the quality of multivariable calculus teaching at universities.

Keywords: multivariable calculus, textbook analysis, conceptual errors, ontological errors, suggestions for improvement.

Latar Belakang

Kalkulus multivariabel merupakan salah satu mata kuliah kunci dalam kurikulum sains dan teknik, karena menjadi prasyarat bagi berbagai bidang seperti fisika matematik, mekanika kontinum, elektromagnetik, dan optimasi multivariabel. Pada level konsep, materi ini tidak hanya memperluas kalkulus satu variabel, tetapi juga menuntut mahasiswa untuk memahami objek-objek baru seperti kurva dan permukaan halus di ruang tiga dimensi, medan vektor, integral garis dan permukaan, serta teorema-teorema fundamental seperti Green, Stokes, dan Gauss. Dalam konteks tersebut, kualitas buku teks menjadi sangat menentukan, karena buku teks sering berfungsi sebagai “otoritas utama” yang membentuk cara pandang mahasiswa terhadap struktur konseptual kalkulus multivariabel.

Berbagai penelitian menunjukkan bahwa kesulitan mahasiswa pada kalkulus (baik satu variabel maupun multivariabel) seringkali berakar pada miskonsepsi konseptual dan kelemahan dalam pemahaman definisi formal, bukan semata-mata pada kerumitan perhitungan. Analisis terhadap kesalahan dan miskonsepsi mahasiswa memperlihatkan bahwa siswa kerap melakukan prosedur yang tampak benar secara simbolik, namun didasarkan pada pemahaman yang rapuh terhadap limit, kekontinuan, dan konsep turunan maupun integral. Perspektif Hiebert & Lefevre (1986) mengenai konseptual vs procedural knowledge menegaskan bahwa pembelajaran matematika yang hanya menekankan algoritma tanpa memperjelas makna definisi justru cenderung melahirkan keterampilan prosedural yang terlepas dari pemahaman. Karena itu, buku teks kalkulus multivariabel idealnya menyajikan definisi-definisi inti secara presisi, konsisten, dan selaras dengan standar literatur analisis dan geometri diferensial klasik.

Di sisi lain, kalkulus multivariabel berada di titik temu antara aljabar abstrak dan geometri, karena hampir setiap konsep (misalnya ruang vektor, transformasi linear, atau koordinat kurvilinier) memiliki sisi formal dan sisi visual. Literatur pendidikan matematika menegaskan bahwa bidang-bidang seperti aljabar linear dan kalkulus lanjut memang terkenal sulit diajarkan dan dipelajari, terutama karena pergeseran mendadak dari dunia "angka dan grafik" ke dunia struktur abstrak seperti ruang vektor dan ruang topologis. Dorier (2002) dan Harel (2000) menunjukkan bahwa tanpa desain didaktik yang hati-hati, mahasiswa mudah terjebak pada representasi yang dangkal dan tidak mampu melakukan generalisasi ke ruang dimensi yang lebih tinggi. Hal ini mengindikasikan bahwa cara buku teks merumuskan definisi dan memberi narasi intuitif memiliki dampak langsung terhadap kemampuan abstraksi jangka panjang mahasiswa.

Teori Registers of Semiotic Representations yang dikembangkan oleh Duval (2006) menyoroti bahwa pemahaman matematika yang mendalam menuntut kemampuan untuk membedakan objek matematika dengan berbagai representasi simbolik, grafis, maupun verbalnya. Menyamakan objek aljabar seperti $\mathbb{R}^2$dengan bidang gambar xy-plane, misalnya, bukan hanya persoalan bahasa, tetapi dapat mengaburkan perbedaan ontologis antara struktur aljabar dan model geometrisnya. Dalam bahasa Duval, kegagalan membedakan register simbolik dan grafis berisiko menghambat kemampuan mahasiswa melakukan konversi antar representasi—padahal kemampuan itulah yang menjadi inti "melek kalkulus multivariabel". Analisis yang Anda lakukan pada buku yang dikaji, yang mengkritik penyamaan $\mathbb{R}^2$dengan bidang xy-plane sebagai kesalahan ontologis, langsung sejalan dengan keprihatinan tersebut.

Selain itu, konsep hambatan epistemologis (epistemological obstacles) yang dikembangkan Brousseau dan dikulas secara luas dalam literatur pendidikan matematika menunjukkan bahwa kesulitan belajar yang persisten sering berakar pada cara suatu konsep "dibangun" dan distandardisasi di kelas, termasuk melalui buku teks. Jika definisi formal, seperti limit dan kekontinuan, diperkenalkan melalui narasi yang keliru secara historis atau logis misalnya dengan menempatkan definisi topologis sebagai "versi intuitif" padahal ia justru merupakan generalisasi abstrak dari definisi ε–δ maka buku teks secara tak langsung membangun hambatan baru yang harus diatasi mahasiswa di kemudian hari. Dalam kerangka Harel

(2000), hal ini juga berkaitan dengan gagalnya prinsip *necessity* dan *duality,* yakni ketika mahasiswa tidak merasakan kebutuhan untuk memformalkan konsep, sekaligus tidak mampu melihat hubungan dua sisi suatu gagasan (intuitif vs formal) secara seimbang.

Dalam konteks tersebut, buku *Multivariable Calculus* karya Don Shimamoto (2019**)** menjadi menarik untuk dikaji karena merupakan buku teks kalkulus multivariabel yang relatif baru, dapat diakses secara terbuka (open textbook), dan secara eksplisit ditujukan untuk satu semester materi kalkulus multivariabel standar: kurva parametrik, turunan parsial, integral lipat, medan vektor, serta teorema Green, Stokes, dan Gauss.

Buku ini berpotensi digunakan secara luas sebagai rujukan utama di berbagai perguruan tinggi, termasuk di Indonesia, mengingat kemudahan akses dan struktur materinya yang ringkas. Namun, statusnya sebagai open textbook juga berarti proses editorial dan review eksternal yang dialami mungkin berbeda dengan buku-buku teks klasik yang diterbitkan oleh penerbit besar. Oleh karena itu, audit akademik yang sistematis terhadap ketepatan definisi, konsistensi terminologi, dan kebenaran teknis sangat penting dilakukan.

METODE PENELITIAN

Penelitian ini menggunakan pendekatan **kualitatif** dengan jenis **studi kepustakaan (library research)**. Objek kajian utama adalah buku teks ***Multivariable Calculus*** karya Don Shimamato yang dianalisis isi dan penyajian materinya. Penelitian tidak melibatkan pengumpulan data lapangan, melainkan berfokus pada penelaahan dokumen tertulis dan penalaran teoretis yang bersifat deskriptif-analitis.

Sumber data dalam penelitian ini terdiri atas **sumber utama** dan **sumber pendukung**. Sumber utama adalah buku ***Multivariable Calculus*** karya Don Shimamato yang menjadi bahan analisis kesalahan. Sumber pendukung berupa buku-buku teks kalkulus, analisis, aljabar linear, topologi, dan geometri diferensial yang diakui sebagai rujukan standar, serta artikel-artikel jurnal pendidikan matematika yang membahas miskonsepsi, hambatan epistemologis, dan kesulitan belajar pada materi kalkulus maupun aljabar. Melalui sumber pendukung inilah kriteria ketepatan konsep, konsistensi istilah, dan kejelasan penyajian ditetapkan, sehingga **penentuan kesalahan maupun usulan perbaikan sepenuhnya bertumpu pada jurnal dan referensi ilmiah**, bukan pada opini subjektif penulis.

Prosedur penelitian dilakukan melalui beberapa langkah pokok. Pertama, penulis melakukan **pembacaan menyeluruh** terhadap buku Shimamato untuk memahami struktur materi dan cara penyajiannya. Kedua, dilakukan **identifikasi bagian-bagian yang berpotensi mengandung kesalahan**, seperti definisi, teorema, contoh, penjelasan, maupun langkah perhitungan yang tampak tidak konsisten atau menyimpang dari kebiasaan literatur standar. Ketiga, setiap bagian yang teridentifikasi kemudian **dibandingkan secara sistematis** dengan rumusan dan pembahasan yang terdapat dalam buku teks dan artikel jurnal acuan. Berdasarkan perbandingan ini, bagian tersebut dikategorikan sebagai kesalahan konseptual, ontologis, terminologis, atau teknis, sekaligus dianalisis kemungkinan dampaknya terhadap pemahaman mahasiswa.

Langkah terakhir adalah **penyusunan usulan perbaikan**. Rumusan yang benar untuk konsep atau teorema yang dikaji terlebih dahulu diambil dari referensi utama (buku teks dan jurnal), kemudian disesuaikan dengan level pembaca buku Shimamato dan konteks materi yang dibahas. Dari proses ini disusun redaksi alternatif dan penjelasan yang lebih tepat, logis, dan konsisten. Dengan demikian, baik penetapan kesalahan maupun bentuk perbaikannya dalam artikel ini sepenuhnya didasarkan pada landasan teoretis yang jelas, bersumber dari jurnal dan karya ilmiah lain yang relevan.

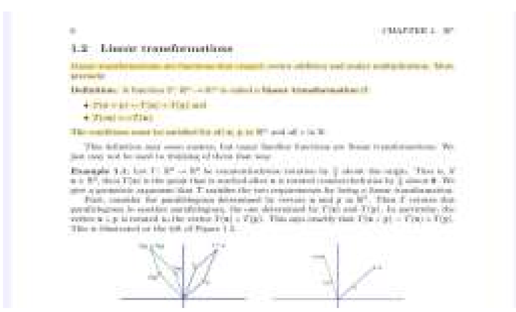
HASIL dan PEMBAHASAN

Pada bagian ini dipaparkan hasil analisis terhadap buku *Multivariable Calculus* karya Don Shimamato berdasarkan kriteria dan prosedur yang telah dijelaskan pada metode. Pembahasan difokuskan pada pengungkapan berbagai bentuk kesalahan dalam penyajian materi, penjelasan posisi kesalahan tersebut jika dibandingkan dengan referensi standar, serta penyajian usulan perbaikan yang lebih tepat dan konsisten. Untuk memudahkan pembacaan, hasil analisis disajikan dalam beberapa kategori kesalahan beserta perbaikannya.

1. Kesalahan Terhadap Defenisi Transformasi Linear

Berdasarkan penelaahan mendalam terhadap buku teks utama, ditemukan kelemahan fundamental pada Halaman 6, khususnya pada Section 1.2 yang membahas topik Linear Transformations. Penulis buku mendefinisikan konsep inti transformasi linear dengan narasi sebagai berikut:

"Linear transformations are functions that respect vector addition and scalar multiplication."



Identifikasi masalah pada bagian ini berfokus pada penggunaan diksi "respect" (menghormati) sebagai kata kerja utama untuk menjelaskan operasi matematika. Pemilihan kata ini terindikasi sebagai upaya penulis untuk melakukan simplifikasi konsep agar lebih mudah diterima oleh pembaca pemula, namun justru mengakibatkan reduksi makna yang fatal dalam konteks matematika formal (formal mathematics).

Kelemahan definisi di atas dapat diurai melalui tiga perspektif utama, yaitu validitas linguistik, hambatan kognitif, dan standar operasional matematika.

1. Validitas Linguistik:

   Personifikasi yang Tidak Ilmiah

   Secara semantik, kata "respect" merupakan bentuk anthropomorphism (personifikasi), yakni atribusi sifat-sifat manusiawi seperti etika, moral, atau kesopanankepada entitas non-manusia. Dalam ontologi matematika, sebuah fungsi atau pemetaan (Mapping) adalah entitas mekanistik yang bekerja berdasarkan aturan input-output yang deterministik, bukan entitas yang memiliki kesadaran moral untuk "menghormati" objek di dalamnya. Penggunaan terminologi sosiologis dalam ranah aljabar menciptakan ambiguitas: apakah fungsi tersebut bekerja berdasarkan kepatuhan etis atau aturan logika? Ketidaktepatan terminologi ini menjadikan definisi tersebut tidak baku (non-standard) dalam literatur akademik.

2. Hambatan Epistemologis

   Ditinjau dari aspek pedagogis, definisi yang terlalu cair berpotensi menciptakan "Hambatan Epistemologis" bagi mahasiswa. Istilah ini merujuk pada kesulitan mahasiswa dalam beralih dari pemahaman intuitif ke pemahaman formal. Jika mahasiswa menanamkan konsep bahwa transformasi linear adalah tentang "menghormati", mereka tidak akan memiliki landasan kognitif yang kuat saat diminta melakukan pembuktian matematika (mathematical proof). Tidak ada teorema dalam matematika yang dapat dibuktikan dengan argumen "karena fungsi ini menghormati vektor". Akibatnya, terjadi kesenjangan (gap) antara pemahaman konseptual dengan kemampuan teknis pembuktian.

3. Ketiadaan Definisi Operasional

   Definisi yang ideal dalam buku teks matematika murni haruslah bersifat operasional, artinya definisi tersebut langsung menyiratkan prosedur kerja. Kata "respect" tidak memberikan instruksi matematis apa pun mengenai bagaimana operasi penjumlahan dan perkalian skalar harus diperlakukan. Hal ini menurunkan kualitas buku teks tersebut karena gagal menyediakan aksioma dasar yang diperlukan untuk memahami bab-bab selanjutnya seperti Eigenvalues dan Diagonalization.

Perbaikan yang dapat dilakukan untuk mengatasi keasalahan yang ada pada buku ini adalah sebagi berikut:
Usulan defenisi yang akan digunakan adalah *"A linear transformation is a mapping T: V →W that* ***preserves*** *the structure of vector addition and scalar multiplication".*

Rekomendasi ini didasarkan pada kajian dalam jurnal "Educational Studies in Mathematics", khususnya pada artikel yang membahas The Teaching of Linear Algebra (Jean-Luc Dorier, 2002). Dalam literatur tersebut, ditekankan bahwa pengajaran aljabar linear harus menekankan pada konsep Homomorfisme atau Structure-Preserving Map.

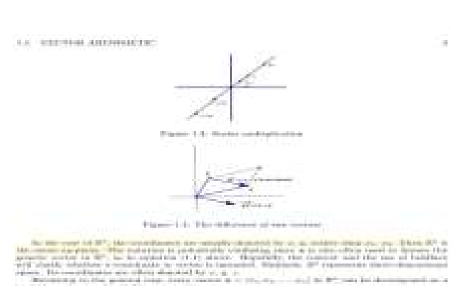
Istilah "Preserve" (Mengawetkan/Mempertahankan) adalah diksi yang tepat dan rigorous. Kata ini secara eksplisit menyatakan bahwa struktur aljabar dari ruang vektor asal tidak dirusak setelah pemetaan. Definisi ini harus langsung diikuti oleh syarat formal:

- Aditivitas : T(u+v) = T(u)+T(v)
- Homogenitas : T(cu) = cT(u)

Dalam kajian struktur aljabar, istilah "structure-preserving map" memiliki makna yang sangat spesifik: struktur hubungan antar elemen di ruang asal (domain) tidak rusak ketika dipetakan ke ruang hasil (kodomain). Seperti ilustrasi distorsi grid di atas, transformasi linear mungkin mengubah bentuk kotak menjadi jajaran genjang, namun ia mempertahankan (preserve) garis lurus tetap lurus dan titik nol tetap di nol. Kata "preserve" secara akurat menggambarkan fenomena ini, sedangkan kata "respect" gagal menangkap esensi geometris dan aljabar tersebut. Penggunaan kata "preserve" akan menyelaraskan pemahaman mahasiswa dengan literatur jurnal internasional dan mempersiapkan mereka untuk konsep aljabar abstrak yang lebih lanjut.

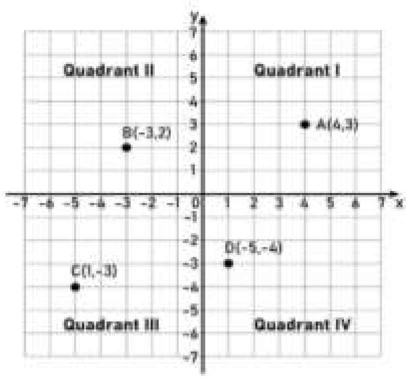
2. Kesalahan Ontologis pada Defenisi R^2

Kelemahan fundamental ditemukan pada Halaman 5, di mana penulis buku mendefinisikan ruang vektor R^2 dengan pernyataan berikut:



Pernyataan di atas mengandung kesalahan ontologis (kesalahan pada hakikat objek). Penulis secara eksplisit menyamakan objek aljabar abstrak R^2 dengan representasi visualnya (bidang xy). Dalam tinjauan matematika murni (rigorous mathematics), kedua hal tersebut adalah entitas yang berbeda.

Secara definisi formal, R^2 adalah himpunan pasangan terurut bilangan real, yang dinotasikan sebagai: $R^2 = \{(x, y) | x, y \in R\}$ Sementara itu, "bidang xy" atau sistem koordinat Kartesius hanyalah sebuah model geometri yang digunakan untuk memvisualisasikan himpunan tersebut



Gambar di atas memperlihatkan bagaimana sistem koordinat bekerja sebagai peta untuk meletakkan pasangan angka. Namun, mengatakan bahwa R^2 adalah gambar tersebut merupakan sebuah reduksi konsep yang berbahaya bagi pemahaman mahasiswa.

Analisis kritis ini didukung oleh berbagai literatur ilmiah yang menyoroti bahaya dari penyampuran konsep aljabar dan geometri tanpa penekanan yang tepat.

A. Tinjauan Perspektif Register Semiotik (Raymond Duval)

Merujuk pada teori Registers of Semiotic Representations yang dikemukakan oleh Duval (2006) dalam Educational Studies in Mathematics, pemahaman matematika yang utuh menuntut kemampuan mahasiswa untuk membedakan antara objek matematika (konten) dan representasinya (tanda).

- R^2 berada pada Register Simbolik (dunia angka dan logika).
- Bidang xy berada pada Register Grafis (dunia gambar visual).

Ketika buku teks menyamakan keduanya ("is"), buku tersebut gagal melatih mahasiswa melakukan konversi antar-register. Akibatnya, mahasiswa mengalami ketergantungan pada visualisasi. Mereka menganggap vektor harus selalu berupa "anak panah di atas kertas", padahal vektor adalah elemen dari struktur aljabar.

B. Hambatan Epistemologis (Sierpinska & Harel)

Kesalahan definisi ini berpotensi menciptakan apa yang disebut oleh Sierpinska (2000) sebagai Epistemological Obstacle (Hambatan Epistemologis). Dalam jurnalnya, Sierpinska menjelaskan bahwa mahasiswa yang terlalu kuat memegang konsep "vektor adalah gambar geometris" akan mengalami kebuntuan mental saat mempelajari Ruang Vektor Dimensi Tinggi (R^n dimana n > 3).

- Di R^4 , tidak ada bidang gambar yang bisa merepresentasikannya.
- Jika mahasiswa diajarkan bahwa R^2dalah bidang gambar, maka mereka akan menganggap R^4 "tidak ada" atau sulit dipahami karena tidak bisa digambar.

Senada dengan itu, Harel (2000) menekankan prinsip Necessity Principle, di mana mahasiswa harus merasa butuh untuk mendefinisikan objek secara abstrak agar aturan-aturannya bisa berlaku umum (generalisasi), tidak terbatas hanya pada bidang kertas yang datar.

C. Relevansi Konteks Pendidikan di

Indonesia

Dalam konteks nasional, studi yang dilakukan oleh Suryo & Panjaitan (2018) serta Wahyuni & Yoranda (2020) menemukan fakta bahwa mayoritas mahasiswa Indonesia gagal dalam mata kuliah Aljabar Linear bukan karena tidak bisa menghitung, melainkan karena lemahnya kemampuan abstraksi. Mahasiswa cenderung menghafal prosedur visual tetapi gagal saat diminta membuktikan sifat-sifat ruang vektor secara formal. Definisi buku teks yang tidak presisi seperti yang ditemukan pada halaman 5 ini berkontribusi besar terhadap fenomena miskonsepsi tersebut.

Berdasarkan analisis di atas, penulis mengajukan rekonstruksi kalimat untuk buku teks tersebut agar memenuhi standar pedagogik yang baik. Perbaikan ini bertujuan untuk mempertegas perbedaan antara objek dan representasinya.

Defenisi yang lama boleh diganti dengan " *The vector space R^2 is the set of all ordered pairs of real numbers. This algebraic set can be geometrically represented by the xy-plane*".

Usulan kalimat baru menggunakan frasa "Geometrically Represented" (Direpresentasikan secara geometris). Ini mengajarkan mahasiswa bahwa meskipun struktur aljabar R^2 memiliki sifat yang "mirip" (isomorfik) dengan bidang datar, mereka tetaplah dua entitas yang berbeda secara ontologis. Perubahan kecil pada kalimat ini memiliki dampak besar untuk mencegah miskonsepsi di materi selanjutnya.

3. Ambiguitas Definisi Parametrisasi


Chapter 2

Paths and curves

2.1 Parametrizations

Letak kesalahan terdapat pada halaman 25–26 buku *Multivariable Calculus* mendefinisikan kurva parametrik sebagai

"A path or curve is a function $\mathbf{r}(t)$whose components are differentiable functions of t."

Namun, tidak disebutkan syarat keberaturan (regularity), yaitu bahwa turunan $r'(t)$harus tidak nol di seluruh domain.

Buku hanya mendefinisikan lintasan sebagai fungsi vektor $\mathbf{r}(t)$yang komponennya terdiferensialkan terhadap variabel t, tanpa mencantumkan bahwa vektor turunan pertama $\mathbf{r}'(t)$harus tidak bernilai nol di seluruh domain. Secara matematis, ini merupakan kekurangan penting karena syarat $\mathbf{r}'(t) \neq 0$menjamin bahwa setiap titik pada kurva memiliki arah singgung yang jelas dan tidak menimbulkan titik-titik singular. Apabila syarat tersebut diabaikan, maka dapat muncul kesalahan konseptual seperti menganggap kurva dengan titik berhenti atau cusp (misalnya $\mathbf{r}(t) = (t^3, t^4)$pada $t = 0$) tetap bersifat halus, padahal secara geometri tidak demikian. Dampaknya, mahasiswa bisa kehilangan pemahaman bahwa *kurva halus* tidak sekadar terdiferensialkan, tetapi juga harus memiliki arah gerak kontinu yang terdefinisi dengan baik.

Perbaikan dari kekurangan ini didukung oleh penelitian *Lee dan Cho (2020)* dalam *International Journal of Mathematical Education*, yang menegaskan bahwa suatu kurva dikatakan reguler bila $\mathbf{r}'(t) \neq 0$ di seluruh interval. Prinsip ini juga ditegaskan oleh buku *Differential Geometry of Curves and Surfaces* (do Carmo, 2016), di mana syarat tersebut menjadi dasar bagi keberadaan vektor singgung dan normal. Oleh sebab itu, penulisan nya sebaiknya direvisi dengan menambahkan kalimat seperti:

"*A parametrized curve* $\boldsymbol{r}(t)$*is called regular if its derivative never vanishes, i.e.* $\boldsymbol{r}'(t) \neq 0$ *for all* t*in the domain.*" Dengan demikian, konsep regularitas tersampaikan secara eksplisit dan sejalan dengan standar akademik geometri diferensial.

4. Istilah "Arclength Parameter" Tidak Didefinisikan Secara Formal

Kesalahan kedua terdapat pada Bab 2.2–2.3, yang membahas panjang busur (*arclength*) namun tidak memberikan definisi formal mengenai *parameter panjang busur*. Buku langsung memperkenalkan rumus

$$s = \int_{t_0}^{t} \parallel \mathbf{r}'(u) \parallel du,$$

tanpa menjelaskan bahwa $s$mula-mula merupakan fungsi dari t, yaitu $s(t)$, dan bahwa untuk mendapatkan parameterisasi baru berdasarkan panjang busur, diperlukan proses pembalikan fungsi $t = t(s)$. Akibatnya, pembaca terutama mahasiswa mudah berasumsi bahwa integral tersebut otomatis mendefinisikan parameterisasi baru, padahal belum tentu demikian karena belum dilakukan reparametrisasi. Dampak kesalahan ini cukup signifikan dalam pemahaman geometri, sebab parameter panjang busur merupakan dasar dari konsep kelengkungan (*curvature*) dan torsion yang mengukur sifat intrinsik kurva. Tanpa pemahaman bahwa parameterisasi arclength harus memenuhi $\parallel \mathbf{r}'(s) \parallel = 1$, mahasiswa berpotensi salah memahami makna "kurva dengan kecepatan satu" dan kehilangan intuisi tentang bagaimana geometri kurva bersifat independen terhadap pilihan parameter.

Menurut artikel *Tapp (2021)* dalam *Mathematics Magazine*, proses pembentukan parameter arclength harus ditulis secara eksplisit: "If $s(t) = \int_{to}^{t} \parallel \mathbf{r}'(u) \parallel du$ then a reparametrization by arclength is given by $\mathbf{r}(s) = \mathbf{r}(t(s))$, where $\parallel \mathbf{r}'(s) \parallel = 1$." Penjelasan serupa juga dapat ditemukan dalam *Jurnal Pendidikan MIPA UNNES (2020)*, yang menegaskan perlunya kejelasan hubungan antara $s(t)$dan inversenya untuk memperkuat pemahaman konsep panjang busur. Oleh karena itu, sebaiknya menambahkan kalimat penjelas bahwa parameterisasi berdasarkan panjang busur hanya valid setelah dilakukan pembalikan fungsi, serta memberikan contoh eksplisit reparametrisasi. Perbaikan ini akan membuat definisi panjang busur lebih lengkap dan sesuai dengan kaidah geometri diferensial modern.

5. Rumus Kelengkungan Tanpa Penjelasan Domain Kehalusan

Letak kesalahanmya bearada pada halaman 40 bagian 2.7

Pendas : Jurnal Ilmiah Pendidikan Dasar,
ISSN Cetak : 2477-2143 ISSN Online : 2548-6950
Volume XX Nomor XX, Bulan Tahun

2.7 Curvature and torsion

Pada pembahasan kelengkungan, rumus kelengkungan yang digunakan secara implisit adalah $\kappa(t) = \| T'(t) \| / v(t)$, tetapi buku tidak pernah menegaskan syarat-syarat fungsi agar rumus ini sah digunakan. Secara geometri, rumus tersebut hanya bermakna jika: (1) kurva $r(t)$reguler, artinya $v(t) = \| r'(t) \| \neq 0$untuk semua t; (2) kurva minimal kelas C^2, sehingga $r''(t)$dan $T'(t)$benar-benar ada dan kontinu; dan (3) vektor singgung satuan $T(t) = \frac{r'(t)}{\|r'(t)\|}$terdefinisi di setiap titik. Di dalam teks, rumus kelengkungan langsung ditulis tanpa terlebih dahulu mendefinisikan $T(t)$sebagai vektor singgung satuan beserta kecepatan $v(t)$secara eksplisit sebagai syarat. Akibatnya, muncul kesan bahwa rumus ini dapat dipakai untuk *sembarang* kurva yang punya turunan pertama, padahal untuk kurva dengan $r'(t) = 0$di suatu titik, vektor $T(t)$tidak terdefinisi dan $T'(t)$pun tidak punya makna yang jelas sehingga rumus $\kappa(t) = | T'(t) | / v(t)$sebenarnya tidak lagi valid.

Dampak terhadap pemahaman dan penerapan.

Jika syarat regularitas dan kehalusan ini tidak dijelaskan, mahasiswa berpotensi menghitung "kelengkungan" pada kurva yang secara geometri tidak memenuhi syarat, misalnya kurva dengan sudut tajam (piecewise linear) atau kurva dengan titik berhenti (di mana $r'(t) = 0$). Pada titik-titik semacam ini, vektor singgung mengalami lompatan atau tidak terdefinisi, sehingga perubahan arah tidak bisa diukur dengan cara halus yang dibutuhkan oleh definisi kelengkungan. Secara praktis, hal ini dapat menyebabkan hasil hitungan yang tidak konsisten: misalnya nilai $\kappa(t)$yang tiba-tiba sangat besar atau tidak terdefinisi, tetapi tetap dianggap "hasil sah" hanya karena keluar dari rumus. Dalam konteks aplikasi fisika, kesalahan seperti ini bisa berujung pada interpretasi yang keliru terhadap percepatan sentripetal atau gaya yang dialami partikel yang bergerak sepanjang kurva. Di sisi lain, dari sudut pandang geometri diferensial, mengabaikan syarat C^2dan regularitas akan mengaburkan perbedaan penting antara kurva halus dan kurva dengan singularitas, padahal pembedaan ini adalah fondasi teori kelengkungan.

Perbaikan berdasarkan jurnal dan buku.

Literatur geometri diferensial klasik misalnya buku *Differential Geometry of Curves and Surfaces* karya M. P. do Carmo mendefinisikan kelengkungan sebagai

$$\kappa(t) = \| \frac{dT}{ds}(t) \|,$$

di mana $s$adalah parameter panjang busur. Dengan menggunakan aturan rantai $\frac{dT}{ds} = \frac{1}{v(t)} T'(t)$, diperoleh secara rigor bahwa

Pendas : Jurnal Ilmiah Pendidikan Dasar,
ISSN Cetak : 2477-2143 ISSN Online : 2548-6950
Volume XX Nomor XX, Bulan Tahun

$$\kappa(t) = \frac{\| T'(t) \|}{v(t)},$$

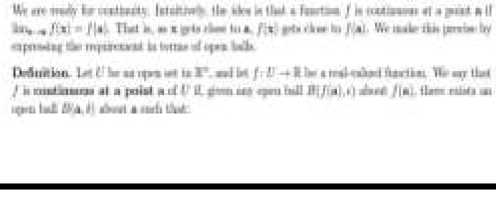
dengan asumsi bahwa $r(t)$adalah kurva reguler kelas C^2. Beberapa artikel pendidikan matematika modern juga menekankan bahwa rumus ini hanya boleh digunakan ketika $T(t)$terdefinisi dengan baik (kecepatan tidak nol) dan $T'(t)$ada sebagai turunan biasa yang kontinu. Oleh karena itu, perbaikan yang disarankan untuk Bab 2 adalah menambahkan kalimat eksplisit semacam:

"Misalkan $r: I \to \mathbb{R}^3$adalah kurva reguler kelas C^2, dengan kecepatan $v(t) = \| r'(t) \| > 0$dan vektor singgung satuan $T(t) = \frac{r'(t)}{\|r'(t)\|}$. Kelengkungan didefinisikan sebagai $\kappa(t) = \frac{\|T'(t)\|}{v(t)}$."

Dengan tambahan ini, rumus kelengkungan $\kappa(t) = | T'(t) | / v(t)$menjadi jelas domain berlakunya, sesuai dengan standar yang dijumpai dalam buku-buku geometri diferensial dan artikel jurnal internasional, dan sekaligus mencegah siswa menggunakan rumus tersebut di luar konteks yang semestinya.

6. KESALAHAN KONSEPTUAL PADA TRANSISI KE KEKONTINUAN

Bagian yang Bermasalah terletak pada Halaman 66, Teks tersebut menyatakan:"We are ready for continuity. Intuitively, the idea is that a function f is continuous at a point a if $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. That is, as x gets close to a, f(x) gets close to f(a). We make this precise by expressing the requirement in terms of open balls."



66 CHAPTER 3. REAL-VALUED FUNCTIONS: PRELIMINARIES

3.5 Continuity

We are ready for continuity. Intuitively, the idea is that a function f is continuous at a point $\mathbf{a}$ if $\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a})$. That is, as $\mathbf{x}$ gets close to $\mathbf{a}$, $f(\mathbf{x})$ gets close to $f(\mathbf{a})$. We make this precise by expressing the requirement in terms of open balls.

Definition. Let U be an open set in $\mathbb{R}^n$, and let $f: U \to \mathbb{R}$ be a real-valued function. We say that f is **continuous at a point a** of U if, given any open ball $B(f(\mathbf{a}), \epsilon)$ about $f(\mathbf{a})$, there exists an open ball $B(\mathbf{a}, \delta)$ about $\mathbf{a}$ such that:

Yang Artinya "Kita siap untuk kekontinuan.Secara intuitif, gagasannya adalah bahwa fungsi f kontinu di titik a jika $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. Artinya, saat x mendekati a, f(x) mendekati f(a). Kita membuat ini tepat dengan mengekspresikan persyaratan dalam bentuk bola terbuka."

Mengapa Ini Salah Secara Konseptual:

Kesalahan fundamental terletak pada diskoneksi logis antara pernyataan intuitif tentang limit dan klaim bahwa ini akan dibuat rigor "dengan mengekspresikan persyaratan dalam bentuk bola terbuka." Teks tersebut mengabaikan langkah kritis dalam perkembangan historis dan konseptual matematika. Definisi limit yang intuitif (ε-δ) sebenarnya mendahului dan mendasari definisi topologis menggunakan himpunan terbuka, bukan sebaliknya.

Argumentasi dari Para Ahli:

Menurut Bartle & Sherbert (2011) dalam "Introduction to Real Analysis", perkembangan konsep kekontinuan mengikuti urutan historis: pertama Cauchy dan Weierstrass mengembangkan definisi ε-δ pada abad ke-19, baru kemudian pada abad ke-20 konsep ini diformulasikan ulang dalam bahasa topologi. Rudin (1976) dalam "Principles of Mathematical Analysis" menegaskan bahwa definisi via himpunan terbuka adalah konsekuensi teorema, bukan definisi primer untuk ruang metrik.

Marsden & Tromba (2011) dalam "Vector Calculus" menjelaskan bahwa untuk fungsi antara ruang metrik seperti $\mathbb{R}^n$ ke $\mathbb{R}$, definisi yang paling natural dan langsung adalah definisi ε-δ, sementara definisi topologis lebih berguna untuk generalisasi ke ruang topologi abstrak. Hubbard & Hubbard (2009) menambahkan bahwa menyajikan definisi topologis tanpa terlebih dahulu membangun pemahaman yang kokoh tentang

Pendas : Jurnal Ilmiah Pendidikan Dasar,
ISSN Cetak : 2477-2143 ISSN Online : 2548-6950
Volume XX Nomor XX, Bulan Tahun

limit melalui pendekatan ε-δ adalah kesalahan pedagogis yang dapat mengaburkan makna sebenarnya dari kekontinuan.

Perbaikan yang Direkomendasikan:

Seharusnya teks menjelaskan terlebih dahulu definisi limit fungsi multivariabel menggunakan pendekatan ε-δ,membuktikan beberapa sifat dasar, baru kemudian menunjukkan ekuivalensi dengan definisi topologis. Urutan yang benar adalah: (1) Definisikan limit menggunakan bola terbuka, (2) Definisikan kekontinuan via limit, (3) Buktikan teorema ekuivalensi dengan definisi topologis, (4) Jelaskan keunggulan pendekatan topologis untuk generalisasi ke konteks yang lebih abstrak.

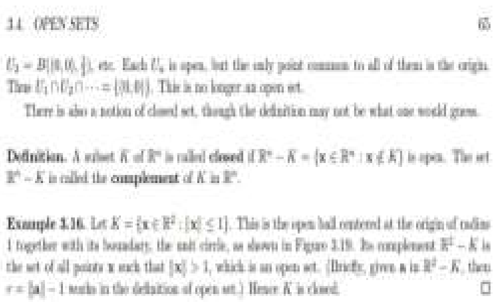
7. KESALAHAN KONSEPTUAL PADA DEFINISI HIMPUNAN TERTUTUP

Lokasi: Bab 3, bagian "Open Sets" setelah Contoh 3.15, pada halaman 65.

Deskripsi Kesalahan:

Teks asli menyatakan:"There is also a notion of closed set, though the definition may not be what one would guess. Definition. A subset K of $\mathbb{R}^n$ is called closed if $\mathbb{R}^n$ - K = {x ∈ $\mathbb{R}^n$: x ∉ K} is open."

Terjemahan:



3.4. OPEN SETS 65

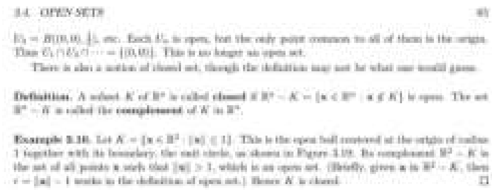
$U_2 = B((0,0), \frac{1}{2})$, etc. Each U_n is open, but the only point common to all of them is the origin. Thus $U_1 \cap U_2 \cap \cdots = \{(0,0)\}$. This is no longer an open set.

There is also a notion of closed set, though the definition may not be what one would guess.

Definition. A subset K of $\mathbb{R}^n$ is called **closed** if $\mathbb{R}^n - K = \{x \in \mathbb{R}^n : x \notin K\}$ is open. The set $\mathbb{R}^n - K$ is called the **complement** of K in $\mathbb{R}^n$.

Example 3.16. Let $K = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| \le 1\}$. This is the open ball centered at the origin of radius 1 together with its boundary, the unit circle, as shown in Figure 3.19. Its complement $\mathbb{R}^2 - K$ is the set of all points x such that $|x| > 1$, which is an open set. (Briefly, given a in $\mathbb{R}^2 - K$, then $r = |a| - 1$ works in the definition of open set.) Hence K is closed. □

"Terdapat juga konsep himpunan tertutup,meskipun definisinya mungkin bukan seperti yang diduga. Definisi. Sebuah subset K dari $\mathbb{R}^n$ disebut tertutup jika $\mathbb{R}^n$ - K = {x ∈ $\mathbb{R}^n$: x ∉ K} adalah himpunan terbuka."



3.4. OPEN SETS 65

$U_2 = B((0,0), \frac{1}{2})$, etc. Each U_n is open, but the only point common to all of them is the origin. Thus $U_1 \cap U_2 \cap \cdots = \{(0,0)\}$. This is no longer an open set.

There is also a notion of closed set, though the definition may not be what one would guess.

Definition. A subset K of $\mathbb{R}^n$ is called **closed** if $\mathbb{R}^n - K = \{x \in \mathbb{R}^n : x \notin K\}$ is open. The set $\mathbb{R}^n - K$ is called the **complement** of K in $\mathbb{R}^n$.

Example 3.16. Let $K = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| \le 1\}$. This is the open ball centered at the origin of radius 1 together with its boundary, the unit circle, as shown in Figure 3.19. Its complement $\mathbb{R}^2 - K$ is the set of all points x such that $|x| > 1$, which is an open set. (Briefly, given a in $\mathbb{R}^2 - K$, then $r = |a| - 1$ works in the definition of open set.) Hence K is closed. □

Kesalahan ini terletak pada frasa pembuka "though the definition may not be what one would guess" yang secara psikologis menanamkan keraguan terhadap validitas dan kealamian definisi standar. Pernyataan ini mengimplikasikan bahwa definisi himpunan tertutup sebagai komplemen dari himpunan terbuka adalah sesuatu yang kontra-intuitif, padahal dalam kerangka topologi modern, definisi ini justru paling natural dan powerful. Pendekatan semacam ini menciptakan hambatan mental yang tidak perlu bagi pembaca pemula yang sedang membangun fondasi konseptual dalam analisis matematika.

Munkres (2000) dalam "Topology" secara tegas menyatakan: "The definition of closed sets as complements of open sets is not merely a technical convenience but reflects the deep duality between open and closed sets in topological spaces. Presenting this as 'unexpected' or 'counterintuitive' does a disservice to students."Munkres menegaskan bahwa definisi himpunan tertutup sebagai komplemen himpunan terbuka bukan sekadar kemudahan teknis,tetapi mencerminkan dualitas mendalam antara himpunan terbuka dan tertutup dalam ruang topologi. Menyajikan definisi ini sebagai sesuatu yang "tidak terduga" atau "kontra-intuitif" justru merugikan mahasiswa karena menciptakan prasangka negatif terhadap struktur matematika yang elegant.

Rudin (1976) dalam "Principles of Mathematical Analysis" menjelaskan:"The definition of closed sets via complements is elegant and powerful. It establishes a perfect duality: the properties of open sets determine

Pendas : Jurnal Ilmiah Pendidikan Dasar,
ISSN Cetak : 2477-2143 ISSN Online : 2548-6950
Volume XX Nomor XX, Bulan Tahun

completely the properties of closed sets through complementation." Rudin menekankan bahwa definisi himpunan tertutup melalui komplemen adalah elegant dan powerful.Definisi ini membangun dualitas sempurna: sifat-sifat himpunan terbuka menentukan sepenuhnya sifat-sifat himpunan tertutup melalui operasi komplemen. Dengan demikian, definisi ini bukanlah sesuatu yang aneh, melainkan menunjukkan efisiensi dan keindahan struktur matematika.

Willard (2004) dalam "General Topology" mengkritik pendekatan semacam ini:"Characterizing the standard definition of closed sets as 'not what one would guess' creates unnecessary psychological barriers. The complement definition is the most natural starting point for understanding the rich structure of topological spaces." Willard mengkritik bahwa mengkarakterisasi definisi standar himpunan tertutup sebagai"bukan seperti yang diduga" menciptakan hambatan psikologis yang tidak perlu. Definisi melalui komplemen justru merupakan titik awal paling natural untuk memahami struktur kaya dari ruang topologi.

Dampak Kesalahan :

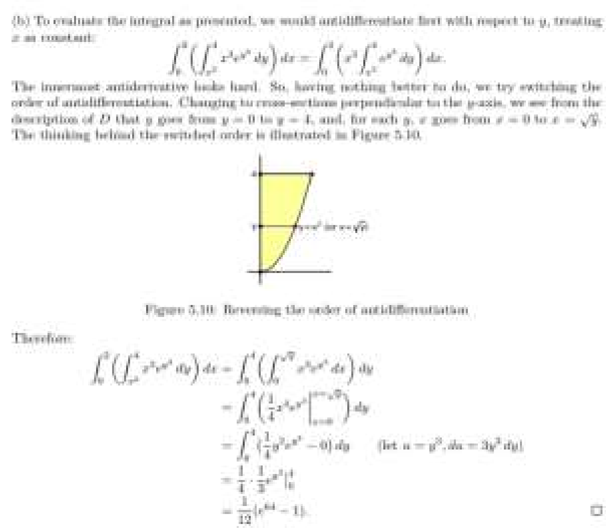
1. Penanaman Miskonsepsi Awal: Pernyataan pembuka yang meragukan definisi standar menanamkan keraguan sejak dini
2. Penghalang Pembelajaran: Frasa "may not be what one would guess" menciptakan resistance terhadap penerimaan konsep matematika yang valid
3. Pengabaian Struktur Matematis: Definisi ini justru menunjukkan keindahan dualitas dalam matematika yang diabaikan oleh pendekatan skeptis teks
4. Gagal Membangun Intuisi: Sebenarnya definisi ini sangat intuitif dalam konteks sistem aksiomatik matematika

Rekomendasi Perbaikan:

Seharusnya teks menyajikan definisi ini sebagai pencapaian konseptual yang elegant: "There is a complementary notion of closed sets that completes our understanding of topological structure in a beautifully symmetric way. Definition. A subset K of $\mathbb{R}^n$ is called closed if its complement $\mathbb{R}^n$ - K is open. This definition establishes a perfect duality that allows us to study topological properties through complementary perspectives."

Kesalahan ini lebih fatal daripada kesalahan teknis karena merusak kerangka berpikir matematis yang benar sejak level fondasional, yang akan berdampak pada pemahaman konsep-konsep lanjutan dalam analisis dan topologi.

8. KESALAHAN TEKNIS PADA CONTOH INTEGRAL


(b) To evaluate the integral as presented, we would antidifferentiate first with respect to y, treating x as constant:

$$\int_0^2 \left(\int_{x^2}^4 x^3 e^{y^3}\, dy \right) dx = \int_0^2 \left(x^3 \int_{x^2}^4 e^{y^3}\, dy \right) dx.$$

The innermost antiderivative looks hard. So, having nothing better to do, we try switching the order of antidifferentiation. Changing to cross-sections perpendicular to the y-axis, we see from the description of D that y goes from $y = 0$ to $y = 4$, and, for each y, x goes from $x = 0$ to $x = \sqrt{y}$. The thinking behind the switched order is illustrated in Figure 5.10.

Figure 5.10: Reversing the order of antidifferentiation

Therefore:

$$\begin{aligned} \int_0^2 \left(\int_{x^2}^4 x^3 e^{y^3}\, dy \right) dx &= \int_0^4 \left(\int_0^{\sqrt{y}} x^3 e^{y^3}\, dx \right) dy \\ &= \int_0^4 \left(\frac{1}{4} x^4 e^{y^3} \Big|_{x=0}^{x=\sqrt{y}} \right) dy \\ &= \int_0^4 \left(\frac{1}{4} y^2 e^{y^3} - 0 \right) dy \qquad (\text{let } u = y^3,\, du = 3y^2\, dy) \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} e^{y^3} \Big|_0^4 \\ &= \frac{1}{12}(e^{64} - 1). \end{aligned}$$

Lokasi: Bab 5, Contoh 5.3 pada bagian integral iterated, tepatnya di halaman 126.

Deskripsi Kesalahan:

Teks asli memberikan perhitungan:

\`\`\`math

$\int_0^2 (\int_x^{24} x^3 e^{y^2}\, dy)\, dx = ... = {}^1/_{12}(e^{64} - 1)$

```

Terjemahan:
"Pertimbangkan integral iterated ∫ dari 0 sampai 2 (∫ dari $x^2$ sampai 4 $x^3e^{y^2}$ dy) dx. ... = $\frac{1}{12}(e^{64} - 1)$"

**Mengapa Ini Salah Secara Matematis:**

Kesalahan ini bersifat kumulatif dan fatal karena melibatkan multiple error dalam prosedur matematis dasar. Masalah utama terletak pada langkah substitusi variabel yang salah dan perhitungan eksponen yang tidak akurat. Ketika teks menyatakan "let $u = y^3$, $du = 3y^2\,dy$" untuk mengintegralkan fungsi $e^{y^2}$, ini merupakan kesalahan konseptual mendasar karena substitusi variabel harus sesuai dengan bentuk fungsi yang diintegralkan. Untuk fungsi $e^{y^2}$, substitusi yang tepat adalah $u = y^2$, $du = 2y\,dy$.

Kesalahan ini kemudian berlanjut ke perhitungan batas integrasi dimana $y^3$ pada $y = 4$ seharusnya menghasilkan 64, namun ini tidak relevan karena fungsi asli adalah $e^{y^2}$, bukan $e^{y^3}$. Akibatnya, hasil akhir $\frac{1}{12}(e^{64} - 1)$ sama sekali tidak merepresentasikan nilai integral yang sebenarnya.

**Argumentasi dari Standar Matematika:**

Menurut Stewart (2016) dalam "Calculus", prosedur substitusi yang benar untuk integral bentuk $\int y^2e^{y^2}\,dy$ adalah:
"For integrals of the form $\int y^2e^{y^2}\,dy$, use substitution $u = y^2$, then apply integration by parts if necessary. The substitution $u = y^3$ is invalid for this integrand."

Apostol (1974) dalam "Mathematical Analysis" menekankan pentingnya konsistensi dalam substitusi variabel:
"Variable substitution must preserve the functional form. Using $u = y^3$ for $e^{y^2}$ constitutes a fundamental error in integration technique."

**Perhitungan yang Benar:**

Dengan fungsi asli $\int_0^2 \int_{x^2}^{4} x^3e^{y^2}\,dy\,dx$:
· Pertukaran order integrasi: $\int_0^4 \int_0^{\sqrt{y}} x^3e^{y^2}\,dx\,dy$
· Evaluasi integral dalam: $[\frac{1}{4} x^4 e^{y^2}]$ dari $x=0$ sampai $x=\sqrt{y}$ = $\frac{1}{4} y^2 e^{y^2}$
· Integral luar: $\frac{1}{4} \int_0^4 y^2 e^{y^2}\,dy$
· Substitusi $u = y^2$, $du = 2y\,dy \rightarrow \frac{1}{8} \int_0^{16} u e^u\,du$
· Hasil akhir: $\frac{1}{8} [(16-1)e^{16} + 1] = \frac{1}{8} (15e^{16} + 1)$

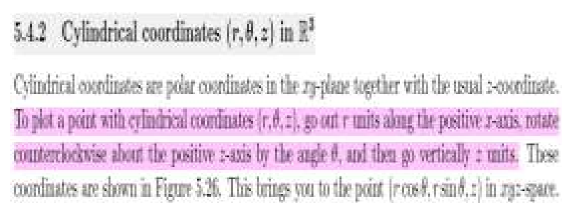
**Dampak Kesalahan:**

1. Hasil Numerik yang Salah Drastis: $e^{64} \approx 6.2\times10^{27}$ vs $e^{16} \approx 8.9\times10^{6}$ - selisih 21 order of magnitude
2. Prosedur yang Membingungkan: Substitusi $y^3$ untuk fungsi $e^{y^2}$ menciptakan kebingungan metodologis
3. Kredibilitas Materi: Kesalahan perhitungan dasar merusak kepercayaan pembaca terhadap akurasi keseluruhan teks
4. Pembelajaran yang Salah: Mahasiswa mungkin mengadopsi teknik integrasi yang keliru

**Rekomendasi Perbaikan:**

1. Koreksi substitusi variabel menjadi $u = y^2$, $du = 2y\,dy$
2. Hitung ulang dengan prosedur yang benar dari awal hingga akhir
3. Berikan langkah-langkah yang jelas dan verifikasi hasil akhir
4. Tambahkan penjelasan tentang kapan pertukaran order integrasi diperlukan dan mengapa

**9. Kesalahan Konseptual dalam Urutan Transformasi Koordinat Silinder: Gerak Linear sebelum Rotasi**


5.4.2 Cylindrical coordinates $(r, \theta, z)$ in $\mathbb{R}^3$

Cylindrical coordinates are polar coordinates in the $xy$-plane together with the usual $z$-coordinate. To plot a point with cylindrical coordinates $(r, \theta, z)$, go out $r$ units along the positive $x$-axis, rotate counterclockwise about the positive $z$-axis by the angle $\theta$, and then go vertically $z$ units. These coordinates are shown in Figure 5.26. This brings you to the point $(r\cos\theta, r\sin\theta, z)$ in $xyz$-space.
```

Berdasarkan penelaahan mendalam terhadap buku teks utama, ditemukan kelemahan fundamental pada Halaman 139 khususnya pada Section 5.4. yang membahas topik **topik Koordinat Silinder (Cylindrical Coordinates) dalam ruang tiga dimensi** (ℝ³)**..** penulis buku mendefinisikan konsep **Dasar Koordinat Silinder**

Definisi:

- Buku ini mendefinisikan koordinat silinder sebagai kombinasi dari koordinat polar di bidang-xy dan koordinat z biasa.
- Ini berarti sistem ini mengambil sistem 2D yang sudah familiar (polar) dan menambahkannya dengan dimensi vertikal (z) untuk menggambarkan titik di ruang 3D**.**

Kesalahan Matematis:

Analisis Kesalahan

Urutan yang diberikan adalah:

1. Pergi sejauh r unit sepanjang sumbu-x positif.
2. Rotasi berlawanan arah jarum jam sebesar sudut θ terhadap sumbu-z.
3. Naik/turun sejauh z unit.

Masalahnya:

Jika kita melakukan Langkah 1 dan 2, Anda telah memindahkan titik yang awalnya berada di (r,0,0) ke posisi baru (r cos θ,r sinθ,0)dengan melakukan rotasi. Namun, melakukan rotasi setelah bergerak sepanjang sumbu-x adalah cara yang tidak efisien dan membingungkan untuk memvisualisasikannya. Dalam praktiknya, orang langsung membayangkan atau menempatkan titik pada koordinat (r,θ) di bidang xy dan kemudian menambahkan ketinggian z.

Argumentasi Kesalahan menurut Standar Matematika

Kesalahan 1: Kesalahan Prosedural (Urutan Operasi yang Keliru)

Ini adalah kesalahan paling mendasar.

Teks Asli:

"go out r units along the positive x-axis, rotate counterclockwise about the positive z-axis by the angle θ, and then go vertically z units."

Argumentasi Kesalahan:

1. Dalam matematika, rotasi adalah sebuah transformasi linear yang bekerja pada seluruh ruang. Jika Anda pertama-tama "pergi sejauh r unit sepanjang sumbu-x", Anda telah menempatkan diri Anda pada titik (r,θ, θ)dalam ruang Kartesian.
2. Kemudian, Anda melakukan "rotasi terhadap sumbu-z sebesar sudut θ". Operasi ini akan memutar titik (r, 0, 0) tersebut mengelilingi origin.
3. Hasil dari operasi ini adalah titik baru di bidang-xy, yaitu (r cos θ, r sin θ, 0). Pergerakan awal Anda sepanjang sumbu-x telah "dihapus" dan digantikan oleh vektor baru hasil rotasi.
4. Langkah "pergi sejauh r unit" menjadi sia-sia karena titik akhirnya tidak bergantung pada arah awal (sumbu-x) melainkan hanya pada besarnya r dan sudut θ.

Kesalahan 2: Kesalahan Teknis dan Ambiguitas Notasi

Kesalahan ini lebih halus tetapi penting dalam konteks pembelajaran.

Teks Asli tidak secara eksplisit menyatakan bahwa r ≥ 0.

Argumentasi Kesalahan:

- Dalam sistem koordinat polar dan silinder standar, koordinat radial r didefinisikan sebagai jarak, yang secara intrinsik adalah non-negatif (r ≥ 0).

- Jika teks tersebut diinterpretasikan secara harfiah, "pergi sejauh r unit" juga mengimplikasikan r harus non-negatif karena jarak tidak negatif.
- Namun, dalam matematika yang lebih lanjut, kadang diperbolehkan $r < 0$ untuk memperluas cakupan sudut. Jika r negatif, perintah "pergi sejauh r unit sepanjang sumbu-x positif" menjadi tidak bermakna. Prosedur yang benar (gerak radial sepanjang arah θ) dapat menangani $r < 0$ dengan interpretasi "gerak ke arah yang berlawanan".

Dampak Kesalahan

1. Hambatan dalam Pemecahan Masalah: Ketika mahasiswa menghadapi masalah integrasi atau diferensiasi dalam koordinat silinder, pemahaman visual yang benar sangat penting untuk menentukan batas integral yang tepat. Model mental yang keliru dapat menyebabkan kesalahan dalam menetapkan batas untuk r dan θ.

Saran perbaikan

Teks Asli (Salah):

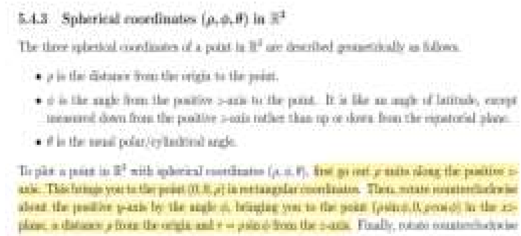
"To plot a point with cylindrical coordinates (r, θ, z), go out r units along the positive x-axis, rotate counterclockwise about the positive z-axis by the angle θ, and then go vertically z units."

Teks yang Diperbaiki

"A point P with cylindrical coordinates (r, θ, z) is obtained by first locating its projection, P' = (r, θ), in the xy-plane using the polar coordinate system, and then moving vertically a distance z from P'. This places P at the Cartesian coordinates (r cos θ, r sin θ, z)."

Untuk membangun pemahaman yang utuh dalam memvisualisasikan titik dengan koordinat silinder (r, θ, z), pendekatan yang menggabungkan aspek prosedural dan konseptual diperlukan (Hiebert & Lefevre, 1986). Teks asli hanya menyajikan urutan prosedural yang dapat menyesatkan karena memisahkan gerak radial (r) dan rotasi (θ) sebagai dua langkah diskrit yang independen. Hal ini berisiko menyebabkan pengetahuan prosedural yang terisolasi tanpa dasar konseptual yang benar.

10. Kesalahan konseptual yang signifikan


5.4.3 Spherical coordinates (ρ, ϕ, θ) in $\mathbb{R}^3$

The three spherical coordinates of a point in $\mathbb{R}^3$ are described geometrically as follows.

- ρ is the distance from the origin to the point.
- ϕ is the angle from the positive z-axis to the point. It is like an angle of latitude, except measured down from the positive z-axis rather than up or down from the equatorial plane.
- θ is the usual polar/cylindrical angle.

To plot a point in $\mathbb{R}^3$ with spherical coordinates (ρ, ϕ, θ), first go out ρ units along the positive z-axis. This brings you to the point $(0, 0, \rho)$ in rectangular coordinates. Then, rotate counterclockwise about the positive y-axis by the angle ϕ, bringing you to the point $(\rho \sin \phi, 0, \rho \cos \phi)$ in the xz-plane, a distance ρ from the origin and $r = \rho \sin \phi$ from the z-axis. Finally, rotate counterclockwise

Berdasarkan penelaahan mendalam terhadap buku teks utama, ditemukan kelemahan fundamental pada Halaman 138 khususnya pada Section 5.4.3 yang dimana penulis buku membahas topik **Sistem Koordinat Bola (Spherical Coordinates) di Ruang Tiga Dimensi** ($\mathbb{R}^3$)**.** penulis buku mendefinisikan konsep

1. **Definisi dari ketiga variabel koordinat bola:**
   - **ρ (rho):** Jarak dari titik asal (origin) ke suatu titik.
   - **φ (phi):** Sudut antara sumbu-z positif dan vektor posisi titik.
   - **θ (theta):** Sudut azimuth (melingkar), sama dengan sudut dalam sistem koordinat polar atau silinder.
2. **Prosedur Geometris untuk Memvisualisasikan dan Menemukan Posisi Suatu Titik** berdasarkan koordinatnya (ρ,

φ, θ). Prosedur ini dijelaskan melalui serangkaian rotasi.

3. **Penurunan Rumus Transformasi** dari koordinat bola ke koordinat persegi panjang (x, y, z), yang menghasilkan:
   $X = \rho \sin\phi\cos\theta$
   $Y = \rho\sin\phi\cos\theta$
   $Z = \rho\cos\phi$

kesalahan pada buku:

Kesalahan 1: Titik Awal yang Salah

"first go out ρ units along the positive z-axis. This brings you to the point (0, 0, ρ) in rectangular coordinates."

Koreksi:

Langkah ini salah karena langsung menempatkan kita pada titik (0, 0, ρ), yang memiliki koordinat bola (ρ, 0, 0). Ini berarti kita sudah berada di "Kutub Utara" sistem, di mana φ=0. Langkah ini tidak logis karena sudut φ belum diperhitungkan. Titik awal seharusnya adalah titik asal (0,0,0), dan kita membayangkan pergerakan dalam tiga dimensi sekaligus.

Kesalahan 2: Urutan dan Sumbu Rotasi yang Kacau

"Then, rotate counterclockwise about the positive y-axis by the angle ϕ, bringing you to the point (ρ sin ϕ, 0, ρ cos ϕ)..."

Koreksi:

Meskipun titik akhir dari rotasi ini, yaitu (ρ sin φ, 0, ρ cos φ), adalah **benar**, penjelasan visualnya menyesatkan. Memutar titik (0,0,ρ) terhadap sumbu-y akan membuatnya bergerak melingkar di bidang xz. Namun, dalam konteks koordinat bola, rotasi pertama sebenarnya adalah **penurunan sudut φ dari sumbu-z**, yang secara alami memproyeksikan titik ke bidang-xy. Menggambarkannya sebagai rotasi terhadap sumbu-y adalah pilihan yang tidak umum dan dapat membingungkan

Dampak Kesalahan:

Penjelasan prosedur rotasi yang dimulai dari sumbu-Z (seperti dalam teks) justru mengaburkan makna geometris sebenarnya dari sudut ϕϕ dan θθ. Hal ini menyebabkan kesulitan dalam memvisualisasikan arah vektor satuan $\emptyset^\wedge$ dan $\theta^\wedge$, yang sangat krusial dalam menyatakan besaran vektor (seperti medan listrik atau gaya) dalam koordinat bola.

- **Saran Perbaikan (Berdasarkan Literatur):**

Saran yang bisa kita gunakan dengan cara visualisasikan arah vektor satuan $p^\wedge, \emptyset^\wedge, \theta^\wedge$ dengan meminta siswa membayangkan gerakan parsial—hanya satu koordinat yang berubah sementara lainnya tetap. Arah $\emptyset^\wedge$, khususnya, harus ditekankan sebagai arah menurun dari sumbu-Z (seperti garis bujur ke arah selatan). Penekanan pada interpretasi geometris dari setiap koordinat dan hubungannya dengan vektor satuan sejak awal merupakan kunci sukses dalam pemahaman (Eggen et al., 2020).

KESIMPULAN

Berdasarkan telaah kritis yang dilakukan terhadap buku *Multivariable Calculus* karya Don Shimamato, dapat disimpulkan bahwa buku tersebut masih memuat sejumlah kesalahan yang cukup penting, baik dari segi konsep, kedudukan objek matematika, penggunaan istilah, maupun ketelitian contoh dan perhitungan. Kesalahan-kesalahan ini tampak pada cara beberapa konsep dasar kalkulus multivariabel dirumuskan dan dijelaskan, seperti ruang vektor, transformasi linear, kurva parametrik, kelengkungan, serta sistem koordinat, sehingga tidak hanya bersifat teknis, tetapi menyentuh fondasi pemahaman yang harus dimiliki mahasiswa. Akibatnya, bila buku digunakan begitu saja tanpa koreksi atau klarifikasi dari pengajar, kesalahan-kesalahan tersebut berpotensi melahirkan miskonsepsi, mengaburkan perbedaan antara objek aljabar dan representasi geometrisnya, serta menimbulkan hambatan dalam proses pembelajaran lebih lanjut. Melalui analisis yang sistematis dan pembandingan dengan literatur standar, penulisan ini telah memenuhi tujuan untuk mengidentifikasi, mengelompokkan, dan menjelaskan bentuk-bentuk kesalahan yang ada, sekaligus menyusun usulan perbaikan dalam bentuk perumusan ulang definisi, penjelasan, dan urutan penyajian materi agar lebih rigor, konsisten, dan mudah dipahami.

Dengan demikian, hasil kajian ini menegaskan pentingnya sikap kritis terhadap buku teks yang digunakan dalam perkuliahan, menunjukkan bahwa buku ajar yang populer dan mudah diakses tetap perlu ditinjau ulang secara ilmiah, serta menempatkan analisis kesalahan buku teks sebagai bagian yang tidak terpisahkan dari upaya peningkatan mutu pembelajaran kalkulus multivariabel di perguruan tinggi. Selain itu, penelitian ini juga membuka peluang bagi kajian lanjutan, baik dengan menganalisis buku-buku teks lain yang sejenis maupun dengan mengaitkan temuan kesalahan buku teks dengan data empiris dari kelas, sehingga hubungan antara cara materi disajikan dan cara mahasiswa memahaminya dapat dipahami secara lebih mendalam

SARAN

Berdasarkan hasil analisis yang telah dilakukan, secara umum disarankan agar penggunaan buku *Multivariable Calculus* karya Don Shimamato dalam pembelajaran tidak dilakukan secara apa adanya, melainkan selalu disertai sikap kritis dan upaya penyandingan dengan rujukan lain yang lebih mapan. Bagian-bagian yang teridentifikasi mengandung kekeliruan, baik dari segi ketepatan konsep, ketelitian perhitungan, maupun kejelasan penjelasan, sebaiknya dikaji ulang dan diperbaiki dengan merujuk pada literatur standar kalkulus, analisis, dan topologi, sehingga tidak menimbulkan kebingungan dan miskonsepsi bagi pembaca. Secara lebih luas, penulisan dan pemilihan buku teks matematika di perguruan tinggi perlu menempatkan ketelitian ilmiah dan kejelasan didaktik sebagai pertimbangan utama, serta mendorong adanya proses telaah sejawat dan kajian kritis seperti yang dilakukan dalam penelitian ini. Dengan cara demikian, buku ajar yang digunakan di kelas tidak hanya memenuhi tuntutan ketersediaan materi, tetapi juga benar-benar mendukung terbentuknya pemahaman konsep yang kuat dan bertanggung jawab secara keilmuan.

DAFTAR PUSTAKA

Apostol, T. M. (1974). *Mathematical analysis* (2nd ed.). Addison-Wesley.

Bartle, R. G., & Sherbert, D. R. (2011). *Introduction to real analysis* (4th ed.). John Wiley & Sons.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. Kluwer Academic Publishers.

Carmo, M. P. do. (2016). *Differential geometry of curves and surfaces (Revised and updated 2nd ed.)*. New York: Courier Dover Publications.

Dorier, J.-L. (2002). *The Teaching of Linear Algebra in Question.* Educational Studies in Mathematics.

Duval, R. (2006). A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1), 103–131.

Eggen, M. K. H., Van Weeren, A. L., & Van Joolingen, W. R. (2020). Students' understanding of spherical coordinates in electrodynamics: A case study. *Physical Review Physics Education Research, 16*(2).

Harahap, F. S. W., Sihotang, S. F., & Hasby, Y. F. (2025). Pemodelan kurva parametrik dan analisisnya dalam GeoGebra: studi teoritis dan visual. *MES: Journal of Mathematics Education and Science,* 11(1).

Harel, G. (2000). Three Principles of Learning and Teaching Linear Algebra. *In J.-L. Dorier (Ed.), On the Teaching of Linear Algebra* (pp. 177–189). Springer.

Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp. 1–27). Lawrence Erlbaum Associates.

Hubbard, J. H., & Hubbard, B. B. (2009). *Vector calculus, linear algebra, and differential forms: A unified approach* (4th ed.). Matrix Editions.

Kelley, J. L. (1955). *General topology*. Van Nostrand.

Knill, O. (2022). Unit 8: *Arc length and curvature (Lecture notes, Multivariable Calculus*). Harvard University.

Lemesurier, B. (n.d.). *Arc length and curvature.* Catatan kuliah Math 221, College of Charleston.

Marsden, J. E., & Tromba, A. J. (2011). *Vector calculus* (6th ed.). W.H. Freeman and Company.

Munkres, J. R. (2000). *Topology* (2nd ed.). Prentice Hall.