Pendas : Jurnal Ilmiah Pendidikan Dasar,
ISSN Cetak : 2477-2143 ISSN Online : 2548-6950
Volume 10 Nomor 04, Desember 2025

Studi Analisis Kesalahan Konsep dalam Buku Kalkulus Multivariabel dan Implikasinya Terhadap Pendidikan Matematika

Suwanto[1], Pujiono Sihite[2], Nurul Azmira Pane[3], Venesya Pitta Rezeki Siburian[4], Joyce Lidia Patricia Daeli[5], Mukhtar[6]

Departement of Mathematics Education, Universitas Negeri Medan,

Jl. Willem Iskandar Pasar V Medan Estate, Medan Indonesia

Email: nurulazmira2022@gmail.com

Abstrak

Definisi dan penyajian konsep yang tepat sangat menentukan keberhasilan mahasiswa dalam memahami materi matematika tingkat lanjut. Penelitian ini bertujuan menganalisis kesesuaian materi dalam buku Kalkulus Multivariabel dengan konsep yang benar secara matematis serta mengidentifikasi bagian yang berpotensi menimbulkan miskonsepsi. Metode yang digunakan adalah analisis kualitatif-deskriptif melalui analisis isi, dengan fokus pada definisi, penjelasan, dan contoh soal yang ada pada buku Kalkulus Multivariabel yang diteliti. Hasil analisis menunjukkan adanya beberapa ketidaktepatan penyajian, seperti penggunaan simbol yang tidak konsisten dan penjelasan konsep yang kurang jelas. Ketidaktepatan ini berpotensi menghambat pemahaman konsep mahasiswa. Penelitian ini merekomendasikan perlunya evaluasi ulang terhadap materi dalam buku Kalkulus Multivariabel agar lebih sesuai dengan kaidah matematika dan mendukung proses pembelajaran.

Kata kunci: kalkulus multivariabel, kesalahan materi, miskonsepsi, analisis isi, pemahaman konsep

Abstract

The precise definition and presentation of concepts play a crucial role in students' understanding of advanced mathematics. This study aims to analyze the alignment of the content in the Multivariable Calculus *textbook with mathematically correct concepts and to identify sections that may lead to misconceptions. The method employed is a qualitative-descriptive analysis through content analysis, focusing on definitions, explanations, and example problems presented in the* Multivariable Calculus *textbook under study. The analysis results indicate several inaccuracies in the presentation, such as inconsistent use of symbols and unclear explanations of concepts. These inaccuracies have the potential to hinder students' conceptual understanding. This study recommends a thorough review of the content in the* Multivariable Calculus *textbook to ensure conformity with mathematical principles and to support the learning process.*

Keywords: *multivariable calculus, content errors, misconceptions, content analysis, conceptual understanding*

Pendahuluan

Dalam pembelajaran matematika, definisi dan cara penyajian konsep menjadi faktor penting yang sangat memengaruhi pemahaman mahasiswa. Buku ajar yang menyajikan definisi tidak jelas atau simbol yang tidak konsisten dapat membuat mahasiswa membangun pemahaman yang keliru, terutama pada materi tingkat lanjut seperti kalkulus multivariabel (Stewart, 2012). Ketidaktepatan penyajian materi sering kali menjadi sumber munculnya miskonsepsi, baik karena penjelasan yang terlalu singkat maupun contoh yang tidak mendukung pemahaman konsep (Putri et al., 2024).

Kalkulus multivariabel sendiri merupakan mata kuliah yang menuntut pemahaman konsep dasar yang kuat. Mahasiswa harus mampu menghubungkan konsep turunan parsial, gradien, divergensi, maupun integral lipat dengan representasi aljabar dan geometri. Jika buku ajar menyajikan konsep-konsep tersebut secara kurang tepat, maka model mental mahasiswa dapat terganggu, sehingga menyulitkan mereka dalam mempelajari topik lanjutan (Adams & Essex, 2013). Beberapa penelitian menunjukkan bahwa kesalahan simbol, langkah penyelesaian, dan definisi yang kurang akurat pada buku ajar dapat memperlambat pemahaman mahasiswa dalam mata kuliah matematika tingkat tinggi (Simanjuntak et al., 2025).

Selain itu, penelitian lain menemukan bahwa buku kalkulus modern sering kali terlalu berfokus pada prosedur tanpa memberikan penjelasan konseptual yang memadai. Hal ini menyebabkan mahasiswa lebih menghafal langkah-langkah daripada memahami hubungan antar konsep, yang pada akhirnya memperbesar peluang munculnya miskonsepsi (Anton et al., 2013). Dalam konteks pendidikan matematika, miskonsepsi yang tidak ditangani dapat terbawa terus ke materi berikutnya dan memengaruhi cara mahasiswa memandang struktur matematika secara keseluruhan (Damanik et al., 2025).

Beberapa buku pendidikan matematika juga menekankan bahwa kualitas buku ajar sangat menentukan arah belajar mahasiswa. Buku yang menyajikan definisi secara lemah, tidak konsisten, atau ambigu dapat merusak proses internalisasi konsep (Tall, 2004). Buku kalkulus yang tidak memberikan representasi visual secara tepat juga bisa membuat mahasiswa gagal memahami makna geometris dari turunan parsial maupun integral permukaan (Hass, Weir, & Thomas, 2018). Bahkan, sejumlah ahli menekankan pentingnya revisi berkala pada buku kalkulus untuk menyesuaikan dengan perkembangan pedagogi matematika modern, terutama dalam hal kejelasan simbol, bahasa, dan urutan materi (Gleason, 2010).

Sejalan dengan berbagai penelitian tersebut, analisis terhadap buku kalkulus multivariabel menjadi penting untuk memastikan bahwa materi yang disajikan benar, konsisten, dan mendukung proses belajar. Penelitian ini dilakukan untuk mengidentifikasi kesalahan dalam penyajian materi yang berpotensi menimbulkan miskonsepsi, khususnya pada mahasiswa yang baru mempelajari kalkulus multivariabel. Dengan mengetahui bentuk-bentuk kesalahan yang muncul, hasil penelitian ini diharapkan dapat menjadi dasar perbaikan buku ajar maupun strategi pengajaran dosen dalam perkuliahan (Smith & Moore, 2016).

Metode Penelitian

Penelitian ini menggunakan pendekatan kualitatif-deskriptif dengan metode analisis isi. Pendekatan ini dipilih karena mampu memberikan gambaran mendalam mengenai ketepatan penyajian konsep dalam buku *Kalkulus Multivariabel*. Fokus utama analisis ini adalah untuk menilai apakah definisi, penjelasan konsep, dan contoh soal yang muncul di dalam buku sesuai dengan konsep yang berlaku dalam literatur matematika formal dan pendidikan matematika tingkat lanjut. Melalui pendekatan ini, peneliti berupaya menggambarkan bentuk-bentuk ketidaktepatan materi yang berpotensi menimbulkan miskonsepsi pada mahasiswa.

Sumber Data

Sumber data dalam penelitian ini adalah beberapa buku *Kalkulus Multivariabel* yang digunakan dalam perkuliahan di perguruan tinggi. Pemilihan buku dilakukan dengan menyeleksi buku yang memiliki indikasi ketidakakuratan konsep, khususnya pada materi seperti turunan parsial, gradien, dan integral lipat. Buku yang dianalisis merupakan buku yang umum dipakai mahasiswa sebagai referensi utama maupun pendamping.

Teknik Pengumpulan Data

Pengumpulan data dilakukan dengan cara mengidentifikasi bagian-bagian materi yang memuat definisi, teorema, contoh soal, atau penjelasan terkait topik kalkulus multivariabel. Setiap bagian yang berpotensi menimbulkan miskonsepsi dicatat dan didokumentasikan. Materi tersebut kemudian dibandingkan dengan konsep formal dalam literatur matematika dan buku kalkulus berstandar internasional yang dianggap valid.

Teknik Analisis Data

Analisis data dilakukan melalui beberapa tahap. Pertama, menyalin kutipan materi yang dianggap bermasalah dari buku yang diteliti. Kedua, mengklasifikasikan bagian tersebut berdasarkan aspek ketepatan konsep, konsistensi notasi, dan kejelasan penjelasan. Ketiga, mengidentifikasi bentuk-bentuk potensi miskonsepsi yang mungkin muncul akibat penyajian yang kurang tepat. Terakhir, menyusun interpretasi mengenai implikasi kesalahan tersebut terhadap pemahaman mahasiswa dalam mempelajari kalkulus multivariabel.

Validitas data dijaga dengan cara membandingkan hasil analisis dengan literatur formal matematika, buku kalkulus internasional, serta standar kurikulum pendidikan matematika di perguruan tinggi. Pendekatan triangulasi ini digunakan untuk memastikan bahwa temuan benar-benar menggambarkan ketidaktepatan konsep yang ada pada buku ajar.

Hasil Penelitian

Berdasarkan kajian yang dilakukan terhadap buku Kalkulus Multivariabel yang digunakan sebagai objek penelitian, ditemukan beberapa miskonsepsi, yaitu:

1. Ditemukan ketidaklengkapan materi pada dot product yang dituliskan tanpa

memberikan batasan bahwa rumus tersebut hanya berlaku jika kedua vektornya tidak nol (nonzero). Rumus $a.b = |a||b| \cos\theta$ tidak dapat diterapkan pada vektor nol karena arah vektor nol tidak terdefinisi ($\vec{a}, \vec{b} \neq 0$). Ketidaktegasan ini dapat menyesatkan pembaca yang baru mempelajari konsep dasar vektor.

Teorema 1
Jika θ adalah sudut antara vektor **a** dan **b**, maka
$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \cos\theta$$

2. Terdapat kesalahan pada halaman 19 yaitu pada penggunaan rumus perkalian silang (cross product) yang dituliskan menggunakan fungsi cosinus, padahal secara konsep rumus cross product selalu melibatkan sinus karena sudut yang dihitung merupakan sudut yang tegak lurus terhadap bidang yang dibentuk dua vektor. Kesalahan ini dapat membuat mahasiswa salah memahami hubungan antara panjang vektor dan besar sudut yang terbentuk.

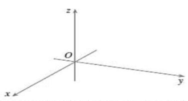
Kedua ruas kita Tarik akar kuadrat dimana $\sqrt{\sin^2\theta} = \sin\theta$ karena $\sin\theta \geq 0$ ketika $0 \leq \theta \leq \pi$ sehingga kita dapatkan
$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \cos\theta \qquad \blacksquare$$

3. Ditemukan miskonsepsi terkait penentuan titik ekstrem fungsi dua peubah. Pada beberapa contoh, buku hanya menggunakan syarat $f_x = 0\ dan\ f_y = 0$ fx=0 untuk menentukan titik kritis, tetapi tidak melanjutkan proses analisis dengan uji determinan Hessian, yaitu $D = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2$. Padahal uji inilah yang menentukan apakah titik tersebut merupakan maksimum, minimum, atau saddle point. Jika proses dihentikan hanya sampai turunan pertama, maka kesimpulan sifat titik ekstrem menjadi tidak valid.

Teorema 1
Jika f memiliki maksimum atau minimum lokal di (a, b) dan turunan parsial pertama fungsi f ada, maka $f_x(a, b) = 0$ dan $f_y(a, b) = 0$

4. Ditemukan miskonsepsi pada halaman Buku Menyatakan bahwa Bidang XY terdiri dari sumbu – X dan sumbu –Z, ini bertentangan secara total dengan definisi ruang 3D. Seharusnya bidang XY = himpunan semua titik (x, y, 0). Sumbu pembentukannya: sumbu X dan sumbu Y, bukan Z.

2



Gambar 1.1 Sumbu koordinat di $\mathbb{R}^3$

Untuk merepresentasikan titik-titik dalam ruang, pertama-tama kita memilih satu titik tetap O (titik awal) dan tiga garis yang saling tegak lurus, yang disebut sumbu koordinat dan diberi label sumbu-x, sumbu-y dan sumbu-z. Biasanya kita menganggap sumbu-x dan sumbu-y berada pada bidang horizontal dan sumbu-z pada bidang vertikal, dan kita menggambar orientasi sumbu-sumbu tersebut seperti pada Gambar 1.1 Arah sumbu-z ditentukan oleh kaidah tangan. Jari-jari tangan kanan dikepal sedemikian rupa sehingga jari-jari tangan tersebut membentuk kurva dari sumbu-x positif ke sumbu-y positif, sedangkan jempol mengarah ke sumbu-z positif.

Tiga sumbu koordinat menentukan tiga bidang koordinat. Bidang-xy adalah bidang yang terdiri dari sumbu-x dan sumbu-y, bidang-yz terdiri dari sumbu-y dan sumbu-z, dan bidang-xy terdiri dari sumbu-x dan sumbu-z. Ketiga bidang koordinat ini membagi ruang menjadi delapan bagian, yang disebut oktan. Oktan pertama, di latar depan, ditentukan oleh sumbu positif.

5. Buku menuliskan: a = jarak ke bidang YZ; b = jarak ke bidang XY; c = jarak ke bidang XY (duplikasi). Ini tidak mungkin ada dua titik yang berbeda tetapi jarak nya terhadap suatu bidang sama, ini absurd karena dua koordinat tidak bisa mengukur jarak ke bidang yang sama. Seharusnya, a = jarak ke bidang YZ; b = jarak ke bidang XZ; dan c = jarak ke bidang XY.

Tiga sumbu koordinat menentukan tiga bidang koordinat. Bidang-*xy* adalah bidang yang terdiri dari sumbu-*x* dan sumbu-*y*, bidang-*yz* terdiri dari sumbu-*y* dan sumbu-*z*, dan bidang-*xy* terdiri dari sumbu-*x* dan sumbu-*z*. Ketiga bidang koordinat ini membagi ruang menjadi delapan bagian, yang disebut oktan. Oktan pertama, di latar depan, ditentukan oleh sumbu positif.

Misalkan *P* adalah sembarang titik di ruang, *a* adalah jarak bidang-*yz* ke *P*, *b* adalah jarak bidang-*xy* ke titik *P* dan *c* adalah jarak bidang-*xy* ke titik *P*. Kita merepresentasikan titik *P* sebagai pasangan berurutan bilangan real (*a*, *b*, *c*) dan kita sebut *a*, *b*, dan *c* sebagai koordinat titik *P*. Jadi, untuk menentukan posisi titik *P*, kita mulai dari titik awal *O* dan memindahkan *a* satuan sepanjang sumbu-*a*, lalu *b* satuan sejajar dengan sumbu-*y*, dan *c* satuan sejajar dengan sumbu-z seperti pada Gambar 1 2.

6. Contoh jarak P (2,-1,7) ke Q (1,-3,5) ditulis dengan kurung ganda yang menyebabkan struktur persamaan rusak, Membuat dua tanda kurung di komponen y1-y2 akan memberikan hasil yang berbeda, ini seakan kita mengkuadratkan semua jumlah delta x dan delta y, yang akan menghasilkan 1 sedangkan sebenarnya harus 1 + 4 (delta x di kuadratkan dan delta y di kuadrat kan). Seharusnya $d(P,Q) = \sqrt{(1-2)^2 + (-3+1)^2 + (5-7)^2}$

6

Penyelesaian:

$$|PQ| = \sqrt{(1-2)^2 + (-3+1))^2 + (5-7)^2}$$
$$= \sqrt{1+4+4} = \sqrt{9} = 3$$

Bola dan Persamaannya

Berdasarkan definisi, bola adalah himpunan semua titik-titik *P*(*x*, *y*, *z*) yang memiliki arak yang sama *C* yaitu *r* sebagaimana dalam Gambar 1.6. Maka titik P berada pada permukaan bola jika dan hanya jika $|PC| = r$. Dengan mengkuadratkan kedua sisi didapat:

7. Pencampuran Notasi: Penggunaan simbol *dz* untuk dua fungsi berbeda:
   Sebagai diferensial formal:
   $$dz = f_x(x,y)dx + f_y(x,y)dy$$
   Sebagai nilai aproksimasi perubahan: $dz = f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)$.

   Lalu Turunan parsial dievaluasi di titik variabel (x, y) saat seharusnya di titik tetap (a, b) untuk keperluan aproksimasi. Ini akan menimbulkan kebingungan antara perubahan aktual (Δz) dan perubahan yang diaproksimasi (dz), serta ketidaktepatan dalam memilih titik evaluasi turunan parsial. Seharusnya perubahan aktual: $\Delta z = f(x,y) - f(a,b)$ dan diferensial total di titik (a, b): $dz = f_x(a,b)dx + f_y(a,b)dy$, serta aproksimasi linier:$f(x,y) \approx f(a,b) + dz$

Diferensial Total

Untuk fungsi satu peubah $y = f(x)$ yang dapat didiferensialkan, kita dapat mendefinisikan diferensial *dx* sebagai sebuah variabel independen, artinya *dx* dapat diberi nilai jika ada bilangan riil. Maka diferensial *y* didefinisikan sebagai

$$dy = f'(x)dx$$

Pada fungsi dua variabel $z = f(x, y)$ yang dapat didiferensialkan, kita dapat mendefinisikan diferensial *dx* dan *dy* sebagai variabel independen. artinya *dx* dan *dy* dapat diberi nilai jika ada bilangan riil. Maka diferensialkan *dz*, juga dinamakan diferensial toal, yang didefinisikan sebagai

$$\boxed{dz = f_x(x,y)dx + f_y(x,y)dy = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy}$$

Jika $dx = \Delta x = x - a$ dan $dy = \Delta y = y - b$, maka diferensial *z* menjadi

$$dz = f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)$$

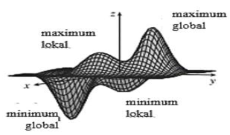
81

Sehingga aproksimasi linier dapat ditulis sebagai

$$f(x,y) \approx f(a,b) + dz$$

8. Kelalaian dalam menyebutkan syarat domain yang penting. Beberapa buku tidak menyatakan bahwa untuk menjamin keberadaan nilai ekstrem global, domain fungsi harus tertutup dan terbatas (kompak), sesuai dengan Teorema Nilai Ekstrem. Dampaknya mahasiswa dapat keliru mencari nilai ekstrem global tanpa memeriksa kondisi domain. Hal ini berisiko menimbulkan kesalahan, terutama jika domain fungsi tidak terbatas sehingga nilai ekstrem global mungkin tidak ada.

108



Gambar 3.1 Posisi nilai optimum suatu fungsi

Definisi 1
Suatu fungsi dua variable memiliki **maksimum lokal** pada (*a*, *b*) jika $f(x,y) \le f(a,b)$ ketika (*x*, *y*) dekat (*a*,*b*). Bilangan *f*(*a*, *b*) dinamakan **nilai maksimum lokal**. Jika $f(x,y) \ge f(a,b)$ ketika (*x*, *y*) dekat (*a*,*b*), maka *f* memiliki **minimum lokal**. Bilangan *f*(*a*, *b*) dinamakan **nilai minimum lokal.**

Jika pertidaksamaan pada Definisi 1 berlaku untuk semua titik pada domain *f*, maka *f* memiliki sebuah maksimum global dan minimum global di (*a*, *b*).

9. Dalam pembahasan mengenai turunan parsial, khususnya definisi dari f_y, terdapat kesalahan penulisan yang

cukup krusial dalam beberapa buku ajar. Kesalahan tersebut muncul dalam bentuk tipografi pada penyebut limit, yaitu:

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{f\big(x_{0,}y_0 + \Delta y\big) - f(x_{0,}y_0)}{\Delta xy}$$

Padahal, bentuk yang benar seharusnya adalah :

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{f\big(x_{0,}y_0 + \Delta y\big) - f(x_{0,}y_0)}{\Delta y}$$

64

C. KEGIATAN BELAJAR 5

1. URAIAN MATERI

a. Turunan parsial

Secara umum, jika f adalah sebuah fungsi dengan dua peubah x dan y. Andaikan x bervariasi sedangkan y dijaga tetap konstan, kita sebut $y = y_0$, dimana y_0 adalah konstanta. Maka kita akan mendapatkan sebuah fungsi dengan satu peubah, dinyatakan sebagai $f(x, y_0)$. Jika f memiliki turunan di x, maka turunannya di $x = x_0$ disebut sebagai **turunan parsial f terhadap x di** (x_0, y_0) dinyatakan sebagai $f_x(x_0, y_0)$. Jadi

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x,\ y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

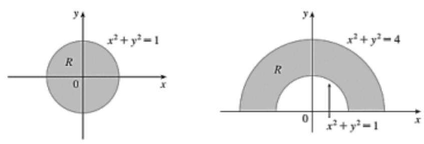
Dengan cara yang sama, **turunan parsial f terhadap y di** (x_0, y_0) dinyatakan sebagai $f_y(x_0, y_0)$. Jadi

$$f_y(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0,\ y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta xy}$$

10. Rumus Jacobian dalam perubahan ke koordinat polar ditulis benar $dA = r\,dr\,d\theta$, tapi dalam contoh perhitungan integralnya kadang lupa menambahkan faktor r. Integral polar harus selalu dikalikan r: $\iint_{\mathrm{R}} f(r, \theta) r\ dr\theta$

Integral Lipat Dua pada Koordinat Polar

Misalkan kita akan mencari integral lipat dua $\iint_R f(x, y) dA$ dimana R seperti pada Gambar 4.17. Pada kasus ini, mendeskripsikan daerah R pada koordinat kartesius lebih sulit dilakukan, namun mudah pada koordinat polar.



(a) $R = \{(r, \theta) \mid 0 \le r \le 1, 0 \le \theta \le 2\pi\}$ (b) $R = \{(r, \theta) \mid 1 \le r \le 2, 0 \le \theta \le \pi\}$

Gambar 4.15 Sketsa daerah R (kasus khusus)

Pembahasan

Sepuluh miskonsepsi di atas menunjukkan bahwa kesalahan/ketidaklengkapan konsep dalam materi dasar dapat berdampak cukup besar terhadap proses belajar mahasiswa.

1. Miskonsepsi terkait dengan dot product menunjukkan pentingnya memahami batasan penggunaan rumus matematika. Banyak mahasiswa biasanya hanya menghafal rumus tanpa memperhatikan kondisi khusus yang menyertainya. Padahal vektor nol memang tidak memiliki arah, sehingga memasukkannya ke rumus yang melibatkan arah jelas tidak valid. Penegasan syarat seperti ini perlu ditempatkan pada materi pengantar agar konsep yang dibangun sejak awal tidak salah.
2. Penggunaan cos pada cross product menunjukkan bahwa ada kekeliruan dalam membedakan operasi antara perkalian titik (dot product) dan perkalian silang. Bagi mahasiswa, kesalahan seperti ini dapat membuat mereka memiliki gambaran keliru tentang geometri vektor, terutama mengenai arah dan besar dari hasil cross product yang seharusnya selalu tegak lurus terhadap kedua vektor pembentuknya. Karena itu, penulisan rumus harus benar-benar konsisten agar tidak menimbulkan pemahaman yang tumpang tindih.
3. Penghilangan uji determinan Hessian membuat penentuan titik ekstrem menjadi tidak lengkap. Dalam kalkulus peubah banyak, titik kritis hanyalah titik kandidat, bukan jawaban akhir. Jika mahasiswa tidak dibiasakan menggunakan uji Hessian, mereka akan kesulitan membedakan jenis ekstrem,

terutama pada fungsi yang memiliki bentuk permukaan lebih kompleks. Hal ini bisa berdampak pada kesalahan dalam menerapkan konsep optimasi, baik dengan satu maupun dua kendala.

4. Penjelasan dalam buku mengenai sistem koordinat di $\mathbb{R}^3$ berpotensi menimbulkan beberapa miskonsepsi konseptual. Pertama, orientasi sumbu yang disebutkan bahwa sumbu-x dan sumbu-y berada pada bidang horizontal dan sumbu-z pada bidang vertical dapat membuat siswa menganggap bahwa orientasi tersebut bersifat mutlak, padahal dalam berbagai konteks seperti grafik komputer atau simulasi fisika, orientasi sumbu bisa disesuaikan. Selain itu, penggunaan kaidah tangan kanan untuk menentukan arah sumbu-z sering kali tidak dijelaskan secara visual atau kinestetik, sehingga berisiko disalahpahami. Kedua, definisi bidang koordinat seperti bidang-xy yang "terdiri dari sumbu-x dan sumbu-y" bisa menimbulkan kesan bahwa bidang tersebut hanya mencakup garis sumbu, bukan seluruh himpunan titik dengan koordinat z = 0.

   Ketiga, penjelasan tentang oktaan pertama sebagai bagian ruang dengan semua koordinat positif dapat membuat siswa mengira bahwa hanya oktaan pertama yang relevan, padahal ada tujuh oktaan lain yang sama pentingnya dalam analisis ruang tiga dimensi.

   Terakhir, representasi titik dalam ruang yang terlalu bergantung pada gambar seperti Gambar 1.1 bisa membatasi pemahaman siswa terhadap konsep koordinat secara analitis, yaitu sebagai tripel bilangan (x, y, z) yang tidak selalu harus divisualisasikan. Oleh karena itu, penjelasan dalam buku sebaiknya dilengkapi dengan klarifikasi bahwa orientasi sumbu bersifat konvensional, definisi formal bidang koordinat, ilustrasi semua oktaan, serta pendekatan analitis terhadap titik dalam ruang agar pemahaman siswa lebih komprehensif dan tidak terjebak pada interpretasi visual semata.

5. Penjelasan mengenai sistem koordinat di ruang tiga dimensi dalam buku tersebut mengandung beberapa potensi miskonsepsi yang perlu dikritisi secara akademik. Pertama, terdapat ketidakkonsistenan dalam penyebutan bidang koordinat: disebutkan dua kali "bidang-xy" padahal yang dimaksud kedua adalah "bidang-xz". Kekeliruan ini dapat membingungkan pembaca dalam memahami struktur ruang dan relasi antar bidang. Kedua, definisi jarak dari titik ke bidang seperti "a adalah jarak bidang-yz ke P" bisa menimbulkan miskonsepsi bahwa koordinat a, b, dan c adalah jarak mutlak, padahal dalam sistem koordinat kartesian, nilai a, b, dan c merepresentasikan posisi relatif terhadap bidang, yang bisa bernilai negatif tergantung letak titik terhadap bidang acuan. Ketiga, penjelasan bahwa titik P direpresentasikan sebagai (a, b, c) berdasarkan "jarak ke bidang" berisiko menyederhanakan konsep koordinat sebagai proyeksi terhadap sumbu, bukan sekadar jarak ke bidang.

   Hal ini dapat mengaburkan pemahaman siswa tentang perbedaan antara jarak geometris dan nilai koordinat dalam sistem kartesian. Keempat, instruksi "memindahkan a satuan sepanjang sumbu-a" juga tidak tepat secara terminologis, karena tidak ada sumbu-a dalam sistem koordinat; yang dimaksud mestinya adalah sumbu-x. Kekeliruan ini dapat mengganggu konsistensi pemahaman tentang penamaan sumbu. Oleh karena itu, penjelasan dalam buku sebaiknya direvisi dengan memperjelas istilah bidang koordinat, membedakan antara jarak dan koordinat, serta menggunakan terminologi yang konsisten dan sesuai dengan konvensi matematika agar tidak menimbulkan interpretasi yang keliru dalam pembelajaran ruang tiga dimensi.

6. Buku menyatakan bahwa bola adalah "himpunan semua titik-titik P(x,y,z) yang memiliki jarak yang sama," tanpa menyebut secara eksplisit bahwa jarak tersebut adalah terhadap titik pusat C. Hal ini dapat menimbulkan miskonsepsi bahwa semua titik memiliki jarak yang sama terhadap sembarang titik, bukan terhadap pusat bola. Dalam penyelesaian soal jarak antara dua titik, terdapat penulisan (-3+1)^2 yang tidak konsisten dengan rumus jarak antar titik. Seharusnya ditulis sebagai $\left(-3-(-1)\right)^2$atau $\left(-3-(-1)\right)^2$agar sesuai dengan rumus $\sqrt{\{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_2)^2+(z_2-z_2)^2\}}$.

   Pernyataan bahwa titik P berada pada permukaan bola jika dan hanya jika |PC|=r benar secara logis, tetapi tidak dijelaskan bahwa: $|PC|<r$ Berarti titik berada di dalam bola; $|PC|>r$ berarti titik berada di luar bola.

   Penurunan rumus dari $|PC|=r$ menjadi $|PC|^2=r^2$ dilakukan tanpa menunjukkan bentuk eksplisit: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2$. Akibatnya, siswa bisa kehilangan konteks bahwa (x_0, y_0, z_0) adalah koordinat pusat bola.

7. Penjelasan mengenai diferensial total dalam buku tersebut mengandung beberapa potensi miskonsepsi yang perlu dikritisi secara akademik. Pertama, penyataan bahwa dx dan dy adalah "variabel independen" yang "dapat diberi nilai jika ada bilangan riil" dapat menimbulkan kesalahpahaman bahwa diferensial adalah bilangan bebas, padahal secara kalkulus, dx dan dy merepresentasikan perubahan kecil atau infinitesimal pada variabel x dan y, bukan sembarang bilangan riil.

   Kedua, penggunaan istilah "diferensialkan dz" secara sintaksis tidak tepat karena dz adalah hasil dari proses diferensiasi, bukan kata kerja; hal ini dapat membingungkan siswa dalam membedakan antara proses dan hasil diferensial. Ketiga, notasi turunan parsial seperti $\partial_z/\partial_x\ dan\ \partial_z/\partial_y$ digunakan tanpa penjelasan bahwa ini berbeda dari turunan biasa, sehingga berisiko disalahpahami oleh siswa yang belum memahami fungsi multivariabel.

   Keempat, penyamaan dx dengan Δx secara langsung sebagai "$dx = \Delta x = x - a$" mengaburkan perbedaan antara perubahan nilai (delta) dan pendekatan infinitesimal (diferensial), yang merupakan konsep fundamental dalam analisis limit. Terakhir, aproksimasi linier dituliskan sebagai $f(x,y) \approx f(a,b) + dz$ tanpa penekanan bahwa ini hanya berlaku jika fungsi terdiferensialkan di titik (a,b), sehingga bisa menimbulkan anggapan keliru bahwa pendekatan linier berlaku untuk semua fungsi. Oleh karena itu, penjelasan dalam buku sebaiknya direvisi dengan memperjelas makna diferensial sebagai pendekatan infinitesimal, membedakan antara proses dan hasil, menjelaskan konteks turunan parsial, serta menegaskan syarat keterdiferensialan agar pemahaman siswa lebih tepat dan tidak terjebak pada interpretasi yang keliru.

8. Penjelasan menyatakan bahwa jika pertidaksamaan berlaku untuk semua titik pada domain, maka nilai tersebut adalah maksimum atau minimum global.Namun, tidak dijelaskan secara eksplisit bahwa nilai global adalah nilai tertinggi atau terendah di seluruh domain, bukan hanya di sekitar titik tertentu.Tanpa penekanan ini, siswa bisa mengira bahwa nilai lokal yang kebetulan lebih besar dari titik-titik lain di sekitarnya otomatis menjadi nilai global.

   Definisi menyebutkan bahwa maksimum atau minimum lokal terjadi ketika $f(x,y) \leq f(a,b)$ atau $f(x,y) \geq f(a,b)$ untuk titik-titik "dekat" (a,b).Istilah "dekat" bersifat informal dan tidak dijelaskan sebagai lingkungan terbuka atau bola ε dalam analisis matematika.Ini bisa menimbulkan miskonsepsi bahwa "dekat" berarti hanya titik-titik yang sangat berdekatan secara visual, bukan dalam pengertian topologi.

   Gambar menunjukkan titik-titik maksimum dan minimum, tetapi tidak dijelaskan bahwa titik-titik tersebut biasanya merupakan titik kritis, yaitu titik di mana turunan parsial bernilai nol atau tidak terdefinisi.Tanpa penjelasan ini, siswa bisa mengira bahwa semua titik ekstrem dapat langsung dikenali dari grafik tanpa analisis turunan. Gambar menunjukkan posisi "maksimum lokal" dan "minimum lokal" secara visual, tetapi tidak dijelaskan bahwa nilai tersebut bisa saja bukan nilai global.Jika siswa hanya mengandalkan grafik, mereka bisa salah mengidentifikasi titik tertinggi secara lokal sebagai nilai maksimum global, padahal bisa ada titik lain yang lebih tinggi di tempat lain dalam domain.

   Pernyataan bahwa fungsi memiliki maksimum atau minimum global jika pertidaksamaan berlaku untuk semua titik domain tidak disertai syarat bahwa domain harus tertutup dan terbatas agar nilai global dijamin ada.Tanpa syarat ini, siswa bisa mengira bahwa semua fungsi pasti memiliki nilai ekstrem global, padahal tidak selalu demikian.

9. Penjelasan mengenai turunan parsial dalam teks tersebut mengandung beberapa potensi miskonsepsi yang perlu dikritisi secara akademik. Pertama, definisi turunan parsial sebagai turunan terhadap satu peubah dengan peubah lainnya dijaga tetap memang benar secara teknis, namun tidak dijelaskan bahwa turunan parsial merupakan pendekatan lokal terhadap perubahan fungsi, bukan sekadar substitusi nilai tetap. Tanpa penekanan ini, siswa bisa mengira bahwa turunan parsial hanya melibatkan penggantian nilai variabel, bukan analisis limit terhadap perubahan infinitesimal.

   Kedua, penggunaan notasi limit $lim_{\Delta\, x \to 0}$ dan $lim_{\Delta\, y \to 0}$ memang tepat, tetapi tidak dijelaskan bahwa pendekatan ini merupakan dasar dari definisi formal turunan parsial, yang berbeda dari turunan biasa karena melibatkan fungsi multivariabel. Ketiga, penjelasan tidak menyebut bahwa turunan parsial dapat digunakan untuk menyusun gradien, arah maksimum perubahan, dan analisis kontur fungsi, sehingga siswa bisa kehilangan konteks aplikatif dari konsep ini. Keempat, tidak dijelaskan bahwa turunan parsial bisa berbeda tergantung arah pendekatan, terutama jika fungsi tidak kontinu atau tidak halus di titik tertentu.

Tanpa penjelasan ini, siswa bisa menganggap bahwa turunan parsial selalu ada dan bernilai tunggal, padahal dalam kasus tertentu bisa tidak terdefinisi atau berbeda tergantung arah. Oleh karena itu, penjelasan dalam buku sebaiknya dilengkapi dengan konteks limit, perbedaan dengan turunan biasa, aplikasi dalam analisis fungsi multivariabel, dan syarat keberadaan turunan parsial agar pemahaman siswa lebih komprehensif dan tidak terjebak pada interpretasi prosedural semata.

10. Kesalahan dalam buku terlihat ketika integral polar ditulis tanpa faktor r, padahal secara matematis rumus yang benar adalah $\iint_R f(r,\theta) r\, dr\theta$ Kelalaian ini berpotensi menimbulkan miskonsepsi bagi mahasiswa, karena mereka bisa meniru langsung langkah yang salah dan menghasilkan nilai integral yang tidak tepat. Buku yang menyajikan contoh tanpa Jacobian membuat mahasiswa kurang memahami alasan geometris di balik faktor r. Oleh karena itu, penting bagi buku teks untuk menekankan bahwa factor r selalu harus ada saat mengubah integral ke koordinat polar.

Kesimpulan

Studi ini melakukan analisis kualitatif-deskriptif terhadap buku ajar Kalkulus Multivariabel dan menemukan banyak ketidaktepatan penyajian materi yang berpotensi menimbulkan miskonsepsi serius pada mahasiswa. Kesalahan meliputi inkonsistensi matematis seperti tidak adanya syarat vektor tak nol pada *dot product*, kesalahan penggunaan kosinus pada rumus *cross product*, dan kelalaian penambahan faktor Jacobian (r) dalam contoh integral polar. Miskonsepsi mendasar juga ditemukan dalam optimasi fungsi dua peubah, yaitu penghilangan uji determinan Hessian untuk klasifikasi titik ekstrem dan ketidaklengkapan syarat domain kompak untuk ekstrem global. Ditemukan pula kesalahan tipografi pada definisi turunan parsial dan ketidakjelasan konsep diferensial total. Oleh karena itu, penelitian ini merekomendasikan evaluasi dan revisi menyeluruh terhadap buku ajar tersebut agar sesuai dengan kaidah matematika formal dan mendukung pemahaman konsep mahasiswa

Daftar Pustaka

Adams, R. A., & Essex, C. (2013). *Calculus: A complete course* (8th ed.). Pearson.

Anton, H., Bivens, I., & Davis, S. (2013). *Calculus* (10th ed.). Wiley.

Damanik, F. B., Fernandes, Y. O., Novita Sari, D. C., Putri, F. N., & Lumban Raja, N. (2025). Pengaruh pemahaman siswa akibat miskonsepsi materi himpunan pada buku matematika. *Pendas: Jurnal Ilmiah Pendidikan Dasar*.

Gleason, J. (2010). Improving calculus instruction through conceptual emphasis. *Journal of Mathematics Education*, 3(2), 45–59.

Hass, J., Weir, M. D., & Thomas, G. (2018). *Thomas' Calculus* (14th ed.). Pearson.

Putri, J. H., Diva, D. F., Dalimunthe, N. F., Prasiska, M., & Irani, A. R. (2024). Miskonsepsi dalam pembelajaran matematika: Sebuah tinjauan literatur. *JagoMIPA*.

Simanjuntak, C. Y. Y., Tarigan, N. E. P., Aziz, D. D., Waruwu, F., & Simorangkir, T. (2025). Analisis isi buku matematika pada materi eksponen. *Pendas: Jurnal Ilmiah Pendidikan Dasar*.

Smith, D., & Moore, J. (2016). Student misconceptions in multivariable calculus. *International Journal of STEM Education*, 3(4), 1–12.

Stewart, J. (2012). *Multivariable Calculus* (7th ed.). Brooks Cole.

Tall, D. (2004). Building theories: The three worlds of mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 24(1), 29–32.

Andriani, P. (2020). Buku Ajar Kalkulus Peubah Banyak. Mataram: Sanabil.